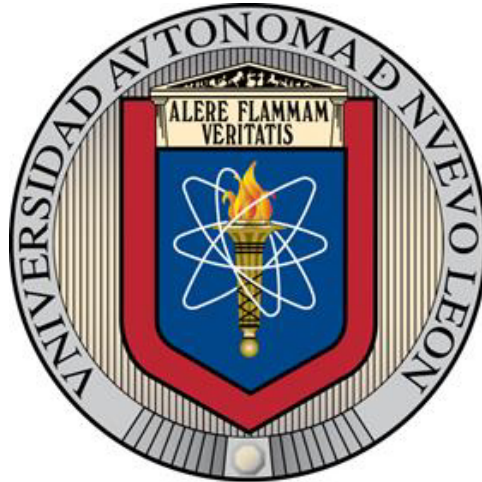


UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA



SINCRONIZACIÓN CAÓTICA DE REDES DE MUNDO PEQUEÑO

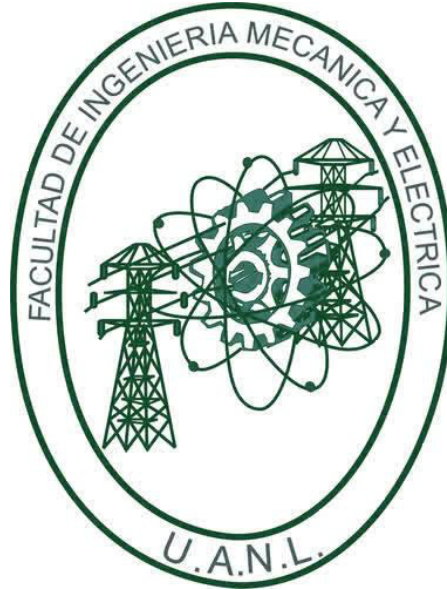
POR

ALLAN GIOVANNI SORIANO SÁNCHEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA

JULIO, 2016

**UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO**



SINCRONIZACIÓN CAÓTICA DE REDES DE MUNDO PEQUEÑO

POR

ALLAN GIOVANNI SORIANO SÁNCHEZ

EN OPCIÓN AL GRADO DE DOCTOR EN INGENIERÍA ELÉCTRICA


SAN NICOLÁS DE LOS GARZA, NUEVO LEÓN, MÉXICO

JULIO DE 2016

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA
SUBDIRECCIÓN DE ESTUDIOS DE POSGRADO

Los miembros del comité de tesis recomendamos que la tesis "**Sincronización caótica de redes de mundo pequeño**" realizada por el alumno **Allan Giovanni Soriano Sánchez**, con número de matrícula **1340716**, sea aceptada para su defensa como opción al grado de **Doctor en Ingeniería Eléctrica**.


El Comité de Tesis



Dr. Cornelio Posadas Castillo
Asesor



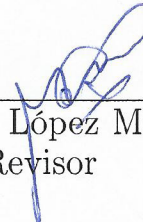
Dr. Miguel Angel Platas Garza
Revisor



Dr. Efraín Alcorta García
Revisor



Dr. Esteban Tlelo Cuautle
Revisor



Dr. Didier López Mancilla
Revisor

Vo. Bo.



Dr. Simón Martínez Martínez
Subdirector de Estudios de Posgrado

Agradecimientos

Al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología (CONACYT) a través del Proyecto de Grupos de Investigación en Ciencia Básica, Ref. 166654.

A mis revisores externos, Dr. Esteban Tlelo Cuautle y Dr. Didier López Mancilla, les agradezco por la disponibilidad para revisar este trabajo, así como por sus valiosas correcciones y comentarios.

A mis revisores internos, Dr. Efraín Alcorta García por sus valiosas y oportunas correcciones; al Dr. Miguel Ángel Platas Garza le agradezco por el tiempo dedicado a las revisiones de este y otros documentos que surgieron de esta investigación así como de sus comentarios y invaluable sugerencias.

A mi asesor, Dr. Cornelio Posadas Castillo le extiendo un profundo y sincero agradecimiento por la paciencia y el apoyo brindado durante el tiempo que duró la investigación, así como por su interés en el proyecto, sus aportaciones e innumerables sugerencias, las cuales mejoraron la calidad de este trabajo.

Resumen

Sincronización caótica de redes de mundo pequeño

Publicación No. _____

Allan Giovanni Soriano Sánchez

Universidad Autónoma de Nuevo León

Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Asesor: Dr. Cornelio Posadas Castillo

Julio del 2016

En el presente proyecto de investigación se lleva a cabo el estudio del efecto de la topología de mundo pequeño en la sincronización caótica de redes complejas. Se consideran redes compuestas por osciladores caóticos (Genesisio–Tesi 3D y Chua generalizado), los cuales son generadores de atractores de múltiples enrollamientos.

Se investiga el efecto de la manipulación de la topología de una red compleja en el proceso de sincronizarla, con el objetivo de disminuir la fuerza de acoplamiento necesaria para alcanzar y mantener el régimen de sincronía, generando así una ley de control menos invasiva.

Se determinó que la facilidad de la red para sincronizar está fuertemente influenciada por la distancia promedio nodo a nodo, la cual, disminuye a medida que se introduce la propiedad de mundo pequeño, es decir, enlaces de largo alcance o atajos entre nodos distantes de la red compleja. Este hecho motivó el desarrollo de un nuevo algoritmo de mundo pequeño que introduce exitosamente dicha propiedad. El efecto principal es la generación de una topología que propicia la sincronización en la red compleja, para valores de la probabilidad p menores que con los algoritmos Newman–Watts y Watts–Strogatz.

Palabras clave: Redes complejas, mundo pequeño, sincronización, osciladores caóticos de múltiples enrollamientos.

Contenido

Lista de figuras	vii
Lista de tablas	ix
1 Introducción	1
1.1 Motivación	1
1.2 Objetivo general	2
1.3 Objetivos particulares	2
1.4 Antecedentes	3
1.4.1 Caos	3
1.4.2 Redes complejas	6
1.4.3 Sincronización	8
1.4.4 Estado del arte	10
2 Osciladores caóticos de múltiples enrollamientos	14
2.1 Oscilador caótico de Chua generalizado	14
2.2 Oscilador caótico de Genesio–Tesi 3D	17
3 Redes complejas de mundo pequeño	20
3.1 Propiedad de mundo pequeño	20
3.2 Algoritmo de mundo pequeño Watts–Strogatz	23
3.3 Algoritmo de mundo pequeño Newman–Watts	25
3.4 Algoritmo de mundo pequeño propuesto	28
4 Sincronización caótica de redes de mundo pequeño	36
4.1 Preliminares matemáticos	36
4.1.1 Modelo de red compleja y su sincronización	37
4.2 Resultados de sincronización caótica	38

4.2.1	Caso 1: sincronización usando Chua generalizado	39
4.2.1.1	Fuerza de acoplamiento para Chua generalizado . . .	39
4.2.2	Caso 2: sincronización usando Genesio–Tesi 3D	49
4.2.2.1	Fuerza de acoplamiento para Genesio–Tesi 3D	50
5	Conclusiones	59
5.1	Trabajos futuros	61
5.2	Producción científica	62

Lista de figuras

1.1	Atractor caótico de Lorenz	4
1.2	Características del caos	5
1.3	Puentes de Königsberg y grafo equivalente	6
1.4	Representación gráfica de una red compleja	7
1.5	Clasificación de redes complejas	9
1.6	Dibujo original de Christiaan Huygens ilustrando su experimento . .	10
1.7	Ejemplos de sincronización	10
2.1	Atractor caótico de Chua generalizado y su no linealidad	15
2.2	Atractor caótico de 4 enr. usando $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = [0.9, -0.8, -1]$	16
2.3	Atractor caótico de 5 enr. usando $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = [-0.1, 0.1, 0.1]$	16
2.4	Atractor caótico de 7 enr. usando $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = [-0.1, 0.1, -0.2]$	16
2.5	Atractor caótico de $2 \times 2 \times 2$ enr. usando $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = [0.2, -0.1, 0.1]$. . .	19
2.6	Atractor caótico de $4 \times 2 \times 2$ enr. usando $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = [-0.3, 0.5, -0.1]$. .	19
2.7	Atractor caótico de $2 \times 5 \times 5$ enr. usando $\mathbf{x}(\mathbf{0}) = [0.6, 0.15, -0.9]$. .	19
3.1	Cálculo del coeficiente de agrupamiento	21
3.2	Cálculo de longitud promedio del camino más corto	22
3.3	Evolución del algoritmo de mundo pequeño de Watts–Strogatz	23
3.4	Watts–Strogatz: coef. de agrupamiento y long. de camino promedio .	24
3.5	Evolución del algoritmo de mundo pequeño de Newman–Watts	26
3.6	Newman–Watts: coef. de agrupamiento y long. de camino promedio .	27
3.7	Evolución del algoritmo de mundo pequeño propuesto	29
3.8	Paso 1 del algoritmo propuesto	29
3.9	Paso 2 del algoritmo propuesto	30
3.10	Paso 3 del algoritmo propuesto	30
3.11	Paso 4 del algoritmo propuesto	31
3.12	Paso 5 del algoritmo propuesto	31

3.13	Algoritmo propuesto: coef. agrupamiento y long. camino promedio . .	33
3.14	Evolución de $C(N, k, p)$ en función de N y k	34
3.15	Evolución de $L(N, k, p)$ en función de N y k	35
4.1	Evidencia de sincronización en red compleja con $N, k, p = 400, 2, 0.1$	48
4.2	Evolución temporal del estado $x(t)$ de algunos osciladores caóticos . .	49
4.3	Rango de la fuerza de acoplamiento para Genesio–Tesi 3D	52
4.4	Evidencia de sincronización en red compleja con $N, k, p = 500, 2, 0.1$	57
4.5	Evolución temporal del estado $x(t)$ de algunos osciladores caóticos . .	58

Lista de tablas

1.1	Oscilador caótico de Lorenz y su atractor correspondiente	4
2.1	Chua generalizado: modalidades del atractor caótico	16
2.2	Genesio–Tesi 3D: modalidades del atractor caótico	19
4.1	Resultados de sincronización de red $N = 100$ y $k = 1, 2, 5$	45
4.2	Resultados de sincronización de red $N = 400$ y $k = 1, 2, 5$	46
4.3	Resultados de sincronización donde $N = 300$ para $k = 1, 2, 5$	54
4.4	Resultados de sincronización donde $N = 500$ para $k = 1, 2, 5$	56

Capítulo 1

Introducción

En el presente capítulo se describe la motivación que llevó a la realización de este trabajo. Se dan a conocer los objetivos general y particulares que se buscaron lograr durante la investigación, para así crearle al lector una visión general del contenido del documento. De igual manera, se proporcionan como antecedentes la información y conceptos básicos necesarios para la total comprensión del escrito.

1.1 Motivación

El estudio de redes complejas es uno de los campos de investigación más activo que se pueden encontrar en la literatura. Esto se debe en gran medida a su capacidad para modelar una amplia variedad de sistemas, según han demostrado diferentes investigadores.

En la actualidad, el creciente interés por organizar sistemas no lineales en redes ha generado que una buena cantidad de conocimiento en este campo se haya establecido, donde destacan propiedades como robustez, capacidad de propagación y capacidad para sincronizar; siendo esta última de importancia considerable por sus potenciales aplicaciones, las cuales van, pero no se limitan a las comunicaciones caóticas seguras [1–5], control de la formación de robots [6–8] y descripción de procesos biológicos como oscilaciones de células cardíacas o el metabolismo mitocondrial [9–11], por mencionar algunas.

En la última década, el auge de las comunicaciones, resultado de la globalización, ha significado un área de gran impacto para las redes complejas, en donde el tiempo, ya sea de transmisión o traslado, y la topología son algunas de las

características más investigadas.

Por tal motivo, estudiaremos el efecto de la propiedad de mundo pequeño en el proceso de sincronizar una red compleja escasamente conectada, la cual estará formada por los osciladores caóticos de múltiples enrollamientos Chua generalizado y Genesis–Tesi 3D. Se pretende optimizar el uso de su capacidad de propagación, producida por las conexiones de largo alcance, con la intención de propiciar el fenómeno de sincronía.

1.2 Objetivo general

Contribuir a la generación de conocimiento en el campo de las redes complejas que exhiben la propiedad de mundo pequeño, caracterizando su propiedad de sincronizar en régimen caótico, haciendo uso de su topología, reduciendo la distancia promedio nodo a nodo y generando una ley de control poco invasiva.

1.3 Objetivos particulares

- Propiciar el estado de sincronía en una red compleja, constituida por osciladores caóticos, a través de la modificación de su topología, con miras a reducir la magnitud del esfuerzo de control.
- Sincronizar redes complejas de mundo pequeño constituidas por osciladores caóticos de múltiples enrollamientos, generadas con los algoritmos existentes (Watts–Strogatz [12] y Newman–Watts [13, 14]).
- Determinar si la rápida propagación de las dinámicas caóticas, producida por la propiedad de mundo pequeño, propicia el fenómeno de sincronización en la red compleja.
- Proponer un algoritmo que introduzca la propiedad de mundo pequeño a una red compleja, de manera que su coeficiente de agrupamiento no sufra un decremento excesivo, mientras se busca la reducción eficiente de su longitud promedio del camino más corto.
- Determinar si el desempeño del algoritmo propuesto en el proceso de llevar una red compleja al régimen de sincronía, resulta mejor que el producido por los algoritmos Newman–Watts y Watts–Strogatz.

1.4 Antecedentes

En el presente trabajo de tesis, se reúnen tres importantes disciplinas, ampliamente exploradas por los investigadores en los últimos años, que han demostrado gran aplicación en la vida del hombre. A continuación, proporcionamos al lector un breve resumen con la información básica necesaria para comprender los siguientes conceptos: empezaremos por describir el fenómeno de *caos*, que es el comportamiento propio de los sistemas no lineales que usaremos en este trabajo; seguido de esto, se describe el concepto de *red compleja*, que resulta ser nuestro centro de interés y donde recae la principal aportación de este trabajo. Posteriormente, definimos el concepto de *sincronización*, que es una de las propiedades más estudiadas de las redes complejas.

Para concluir el capítulo, se proporciona una síntesis de los trabajos más recientes y destacados sobre el tema, con el objetivo de establecer el panorama del que parte esta investigación.

1.4.1 Caos

El fenómeno llamado *caos* ha sido estudiado ampliamente en la segunda mitad del siglo XX. De manera general, el caos, es un fenómeno que exhibe un comportamiento temporal de formas muy irregulares y en apariencia aleatoria, sin embargo, es de naturaleza determinista. La palabra *caos* proviene del griego “ $\chi\acute{\alpha}\varsigma$ ” que significa impredecible [15]. La primer evidencia física de caos aceptada fué la realizada por Edward Lorenz en 1963 [16]. Intentando predecir el comportamiento del clima, simuló el conjunto de ecuaciones diferenciales que se muestran en la Tabla 1.1, más tarde conocidas mundialmente como las ecuaciones de Lorenz. El resultado de la simulación fue un atractor que actualmente se conoce como el atractor de Lorenz y que se muestra en la Fig. 1.1.

De entre las definiciones de caos que han surgido en la literatura [17, 18], una de las más aceptadas es la que propuso Robert L. Devaney en 1989 [18–20]. De acuerdo con Devaney, las características que debe cumplir un sistema dinámico para que se considere caótico son las siguientes [18, 19]:

Definición 1.1 *Sea X un espacio métrico. Un mapa continuo $f : X \rightarrow X$ se dice que es caótico si:*

1. *f es transitiva.*

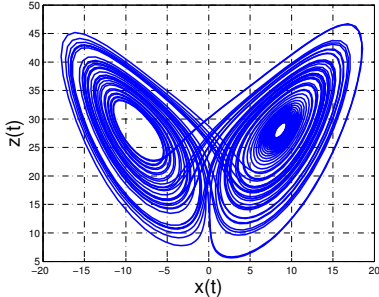
Modelo del oscilador	Atractor caótico
$\begin{cases} \dot{x} &= a(y - x), \\ \dot{y} &= x(b - z) - y, \\ \dot{z} &= xy - cz. \end{cases}$	 <p data-bbox="803 598 1372 724">Fig. 1.1: Atractor caótico de Lorenz obtenido con $a = 10$, $b = 28$, $c = 8/3$ para $[x(0), y(0), z(0)] = [-0.1, -0.1, -0.1]$.</p>

Tabla 1.1: Primera evidencia del caos realizada por Edward Lorenz, ecuaciones diferenciales que describen el oscilador y atractor caótico correspondiente [16].

2. *El conjunto de puntos periódicos de f son densos en X .*

3. *f tiene dependencia sensible a las condiciones iniciales.*

La *transitividad de una función* asegura que en dos zonas cualesquiera del espacio en donde está definida, existe un punto de la primer zona, cuya órbita periódica visita en algún momento la segunda [20].

La *densidad de f en X* garantiza que la distancia entre dos puntos $d(x, y) < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ [20].

La *sensibilidad a condiciones iniciales* es posiblemente la característica más conocida del fenómeno caótico, la cual se refiere a la divergencia de dos trayectorias, provocada por una pequeña diferencia en el valor de dos estados que parten inicialmente muy cercanos uno del otro. Además de estas condiciones, otras características, que en conjunto indican la presencia de caos son:

- Exponentes de Lyapunov positivos (al menos uno) [21].
- Atractores extraños [22, 23].
- Dimensión fractal en los atractores [23, 24].

Los *exponentes de Lyapunov* de una trayectoria, son la medida de la tasa exponencial media de divergencia de las trayectorias que la rodean [21]. Los

atractores extraños son un indicador de un comportamiento complicado, en este caso en particular de comportamiento caótico, los cuales poseen dimensión fractal [22,23]. Por último, la *dimensión fractal* es el número racional que se obtiene de aplicar el estudio de dimensión a un atractor caótico [23,24]. En la Fig. 1.2 se ilustran algunas de estas características.

Para esta investigación, los osciladores caóticos que se emplean son generadores de atractores de múltiples enrollamientos, que son estructuras en forma de espiral con rotaciones infinitas [25], los cuales se describen a detalle en el Capítulo 2. A continuación, damos paso a lo concerniente a redes complejas.

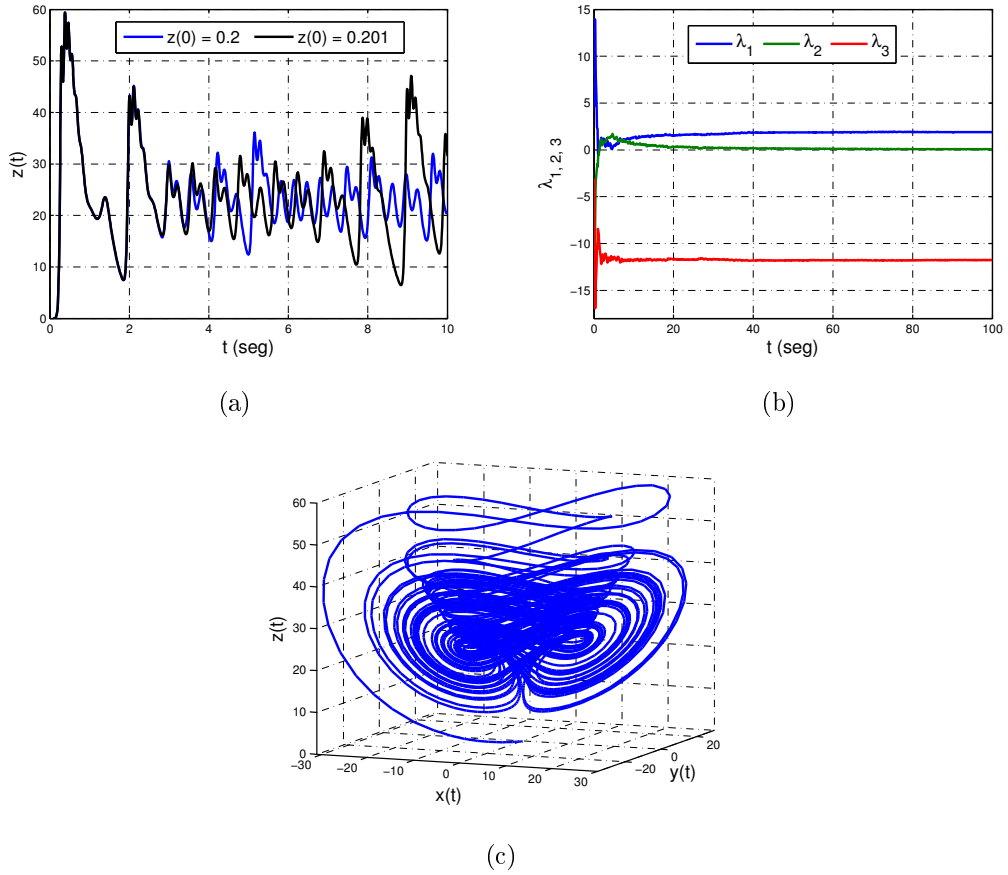


Fig. 1.2: Características del caos: **(a)** Sensibilidad a condiciones iniciales del estado $z(t)$ del oscilador caótico de Chen. **(b)** Exponentes de Lyapunov $[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3] = [1.9, 0, -11.7]$ correspondientes al oscilador caótico de Chen. **(c)** Atractor caótico del oscilador de Chen.

1.4.2 Redes complejas

El estudio de las redes está a cargo de la rama de las matemáticas discretas llamada *Teoría de grafos*. El nacimiento de la teoría de grafos data del año 1736, cuando el matemático suizo Leonhard Euler hizo pública la solución del problema de los puentes de Königsberg, usando un grafo equivalente como se muestra en la Fig. 1.3 [26–28]. Este hecho desencadenó un considerable interés en el campo, que posteriormente dio respuesta a cuestionamientos que hasta ese momento estaban inconclusos.

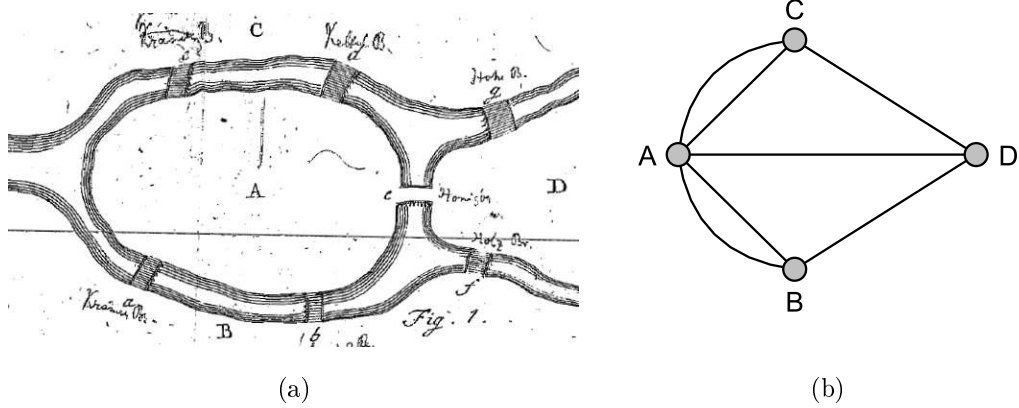


Fig. 1.3: (a) Dibujo original de los puentes de Königsberg [26]. (b) Grafo equivalente del problema de los puentes de Königsberg.

Desde entonces, el grafo ha sido objeto de estudios exhaustivos que han derivado en su aplicación en diferentes disciplinas científicas, entre las que se encuentran la biología [29, 30], neurología [31, 32], sociología [33, 34] y economía [35, 36], por mencionar algunos ejemplos y cuya definición es la siguiente [28]:

Definición 1.2 *Un grafo dirigido (no dirigido) $G = (\mathcal{N}, \mathcal{L})$ consta de dos conjuntos \mathcal{N}, \mathcal{L} tal que $\mathcal{N} \neq \emptyset$ y \mathcal{L} es un conjunto de pares de elementos ordenados (no ordenados) de \mathcal{N} . Los elementos de $\mathcal{N} \equiv \{n_1, n_2, \dots, n_N\}$ son los nodos (vértices o puntos), mientras que los elementos de $\mathcal{L} \equiv \{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ son las conexiones (aristas o líneas). Dos nodos unidos por una conexión son llamados **nodos adyacentes o vecinos**. El grado k_i de un nodo i es el número total de sus conexiones. En un grafo dirigido el orden es importante: l_{ij} representa una conexión del nodo i al j , $l_{ij} \neq l_{ji}$. En un grafo no dirigido se dice que la conexión es incidente en ambos nodos.*

Los diferentes niveles de organización en que se presentan los sistemas que pueden ser modelados por un grafo van desde lo microscópico: redes de regulación

genética [29, 32], redes de proteínas [30, 37], redes neuronales [31, 32] y redes metabólicas [37–39]; hasta lo macroscópico: las redes sociales [33, 34], el Internet [32, 37], el World Wide Web [32, 37], las redes de comunicaciones [32, 37, 40] y redes de colaboración científica [32, 37].

Con base en lo anterior, una **red compleja** se define como un conjunto de nodos interconectados que interactúan entre sí, donde cada nodo es la unidad fundamental que contiene información detallada de la red [41]. El término complejo se refiere a su topología y a las características de los nodos. En la Fig. 1.4 se muestra la representación gráfica de una red compleja, donde se aprecian dos escenarios: flujo de la información en ambos sentidos de la conexión (red compleja no dirigida Fig. 1.4 a) y flujo en un solo sentido de la conexión (red compleja dirigida Fig. 1.4 b).

Las redes complejas se clasifican de la siguiente manera:

1. **Redes complejas estructurales:** incluyen las topologías regulares, las cuales se caracterizan por poseer un patrón de conexión (global, estrella y anillo) e irregulares con conexiones arbitrarias [28, 32, 42] Fig. 1.5 (a).
2. **Redes complejas ponderadas:** se caracterizan por poseer pesos en los enlaces, lo que les introduce jerarquía [28, 32, 41] Fig. 1.5 (b).
3. **Redes complejas aleatorias:** se caracterizan por tener todas sus conexiones realizadas aleatoriamente entre pares de nodos. Erdős–Rényi es el modelo más empleado [32, 43] Fig. 1.5 (c).

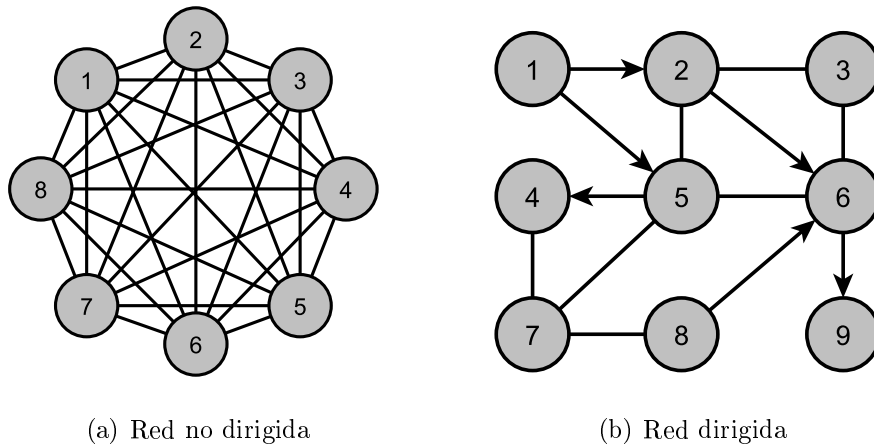


Fig. 1.4: (a) Red compleja regular para $N = 8$. (b) Red compleja irregular para $N = 9$.

4. **Redes complejas de libre escala:** sus características principales son que la distribución del grado $P(k)$ obedece una ley de potencia del tipo $P(k) \sim 2m^{1/\beta}k^{-\gamma}$, debido a la existencia de nodos que tiene preferencia para conexión, donde $\gamma = \frac{1}{\beta} + 1 = 3$, k es el grado del nodo y m es el número de nodos existentes en la iteración i [28,32,41] Fig. 1.5 (d).
5. **Redes complejas de mundo pequeño:** se caracterizan por poseer un grado alto de conectividad y una distancia promedio entre nodo pequeña, resultado de la presencia de conexiones de largo alcance entre nodos distantes. Los modelos más usados son Watts–Strogatz [12] y Newman–Watts [13,14] Fig. 1.5 (e).

En la Fig. 1.5 se ilustra la clasificación de redes complejas que se acaba de presentar. En este trabajo de tesis, estudiaremos las redes complejas de mundo pequeño, las cuales son descritas a detalle en el Capítulo 3. A continuación, damos paso a la descripción del concepto de sincronización.

1.4.3 Sincronización

Toca ahora describir uno de los fenómenos más interesantes que pueden llegar a presentarse en las redes complejas, el cual ha resultado de utilidad para el hombre y al que se le han dado diferentes aplicaciones [1–4,6–11].

El concepto de **sincronía** puede definirse como la circunstancia donde dos o más sucesos o fenómenos ocurren al mismo tiempo [44]. Se considera como el padre de la sincronía a Christiaan Huygens, puesto que los registros históricos muestran que fué el primero en documentar este fenómeno ocurrido en dos péndulos [45]. Se dice que el matemático holandés observó que dos relojes de péndulo, que inicialmente oscilaban a frecuencias diferentes, sincronizaban sus movimientos después de permanecer acoplados a través de una viga; además, si alguna interferencia interrumpía la sincronía, esta se recuperaba en un corto tiempo [45]. En la Fig. 1.6 se muestra el dibujo original de Christiaan Huygens ilustrando su experimento con los relojes de péndulo.

Numerosos ejemplos de sincronía involuntaria han sido registrados en los últimos años, los cuales confirman el rol crucial que desempeña en el desarrollo de procesos como: generación de la memoria [46], presencia de atención selectiva [47] y el proceso de percepción [48], la descripción del comportamiento neural–interpersonal y la interacción social [49,50], así como de la actividad neuronal [51]. Por otro lado,

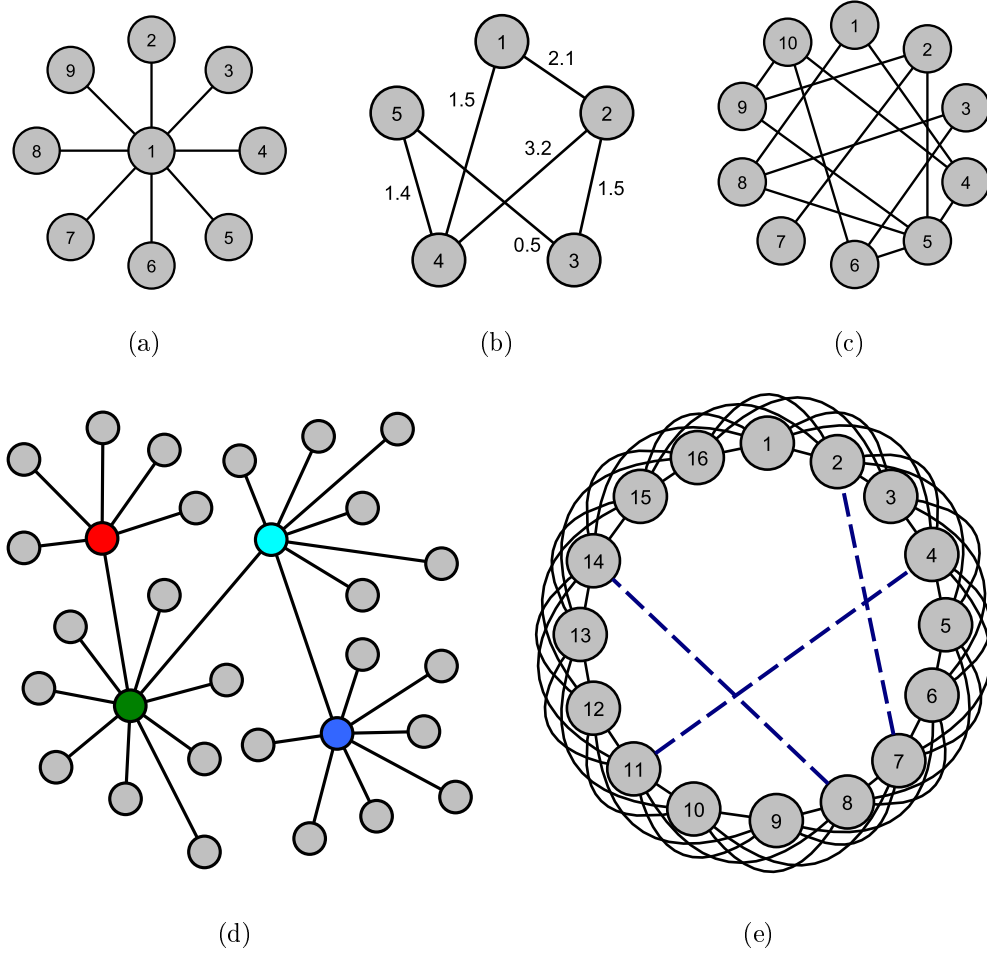


Fig. 1.5: Ejemplos de la clasificación de redes complejas: **(a)** Red compleja estructural: topología estrella. **(b)** Red compleja ponderada. **(c)** Red compleja aleatoria. **(d)** Red compleja de libre escala. **(e)** Red compleja de mundo pequeño, donde la línea en guión denota los enlaces de largo alcance agregados aleatoriamente.

el hombre ha desarrollado a voluntad procesos en los que la sincronía es el elemento medular, tal es el caso de los deportes de alto rendimiento, y se ha visto beneficiado enormemente en la ingeniería al introducir este fenómeno en los procesos industriales. En la naturaleza puede observarse sincronización en el canto de los grillos [45], la bioluminiscencia de las luciérnagas [45], la toma de decisiones en una manada [45,52] y la disposición de las hojas de algunas plantas con el día y la noche [45]. En la Fig. 1.7 se muestran algunos ejemplos donde se presenta el fenómeno de sincronía para diferentes escenarios, donde sin duda, aquellos que influyen en la vida del hombre son los más relevantes.

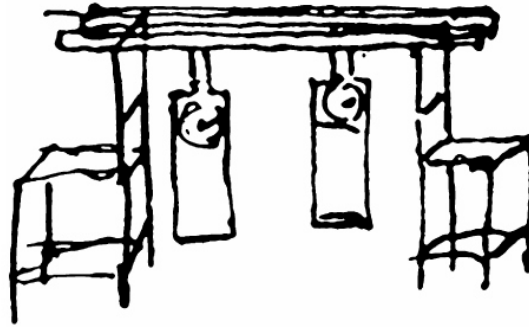


Fig. 1.6: Dibujo original de C. Huygens ilustrando su experimento de sincronía en la carta dirigida a su padre con fecha 26 de Febrero de 1665 [45].

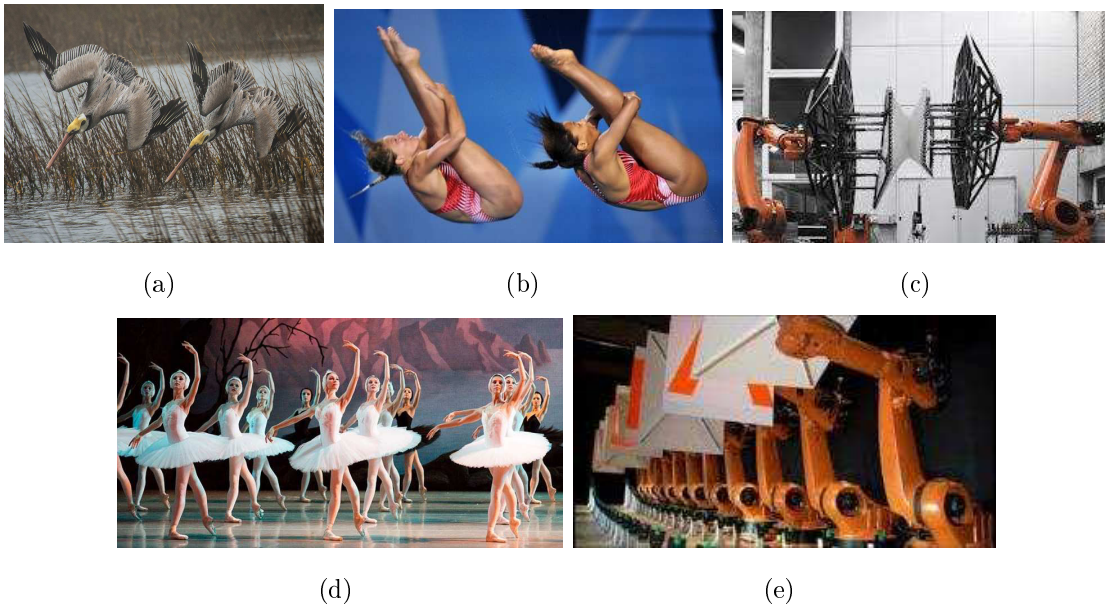


Fig. 1.7: Ejemplos de sincronización en diferentes escenarios: **(a)** Sincronía en el vuelo de las aves. **(b)** y **(d)** Sincronía presente en disciplinas de alto rendimiento. **(c)** y **(e)** Sincronía presente en la industria.

Una vez descritos los tres campos que integran esta investigación, damos paso a la última sección de este capítulo, en donde se describe brevemente el estado del arte del tema de interés.

1.4.4 Estado del arte

Como se mencionó anteriormente, el fenómeno de sincronía ha sido encontrado y registrado en diferentes escenarios, siendo su presencia en las redes complejas

causante del surgimiento de una importante cantidad de información. Una vez determinada la importancia de la interacción entre individuos dictada por la topología, las redes complejas han sido compuestas por sistemas dinámicos, con la intención de conocer las propiedades, comportamientos y fenómenos que puedan surgir de esta combinación.

Esto fue posible después del surgimiento del trabajo realizado en 1990 por L.M. Pecora y T.L. Carroll, quienes demostraron por primera vez que era posible que dos osciladores caóticos, que partían de condiciones iniciales diferentes, se comportaran de manera sincronizada [53]. Como resultado, en los últimos 25 años, las redes complejas han sido objeto de numerosos estudios, en donde el objetivo principal es caracterizar el fenómeno de sincronía, usando sistemas dinámicos no lineales que exhiben comportamientos irregulares, principalmente caótico e hipercaótico.

Las bases de la sincronización de caos y sus aplicaciones fueron establecidas algunos años después como se describe enseguida. En 1994, C.W. Wu y L.O. Chua definieron los conceptos de sincronización asintótica y parcial, así como la relación entre la sincronización asintótica y la estabilidad asintótica [54]. En 1995, J.F. Heagy y colaboradores investigaron el rol de las órbitas periódicas inestables en el comportamiento caótico sincronizado [55]. Probaron también cómo se iniciaba el comportamiento que deriva en la desincronización, y sugirieron tomarlo en cuenta para alcanzar sincronización caótica de mayor calidad.

En 1996, N.F. Rulkov discutió el comportamiento cooperativo relacionado con los regímenes del caos sincronizado, y bosquejó algunos ejemplos que ilustraran diferentes tipos de oscilaciones caóticas idénticas [56]. En 1997, L.M. Pecora y colaboradores revisaron algunos conceptos básicos de la sincronización caótica, tales como criterios de estabilidad y sincronización generalizada; también examinaron configuraciones de acoplamiento así como esquemas de comunicaciones seguras [57]. Ese mismo año, G. Kulumbán y colaboradores proporcionaron una aproximación unificada para el análisis y comparación de sistemas de comunicación caótica, clarificando el rol de la sincronización para las comunicaciones caóticas y describiendo algunos esquemas para sincronizar [58]. En 2001, S. Yanchuk y colaboradores analizaron el mecanismo de la desincronización para un sistema de dos osciladores idénticos acoplados, y reportaron propiedades de estabilidad transversal para el punto de equilibrio en sistemas acoplados [59].

Por otro lado, varios métodos han sido propuestos para lograr sincronización

entre osciladores caóticos, los cuales pueden ser clasificados en dos modalidades: la primera modalidad está compuesta por los esquemas de control convencionales que llevan a cabo la sincronización entre pares de osciladores, regularmente en configuración maestro-esclavo. Entre los métodos más destacados se encuentran, por ejemplo, sincronización por modos deslizantes [60], sincronización a través de observadores no lineales [61, 62], sincronización usando control adaptativo y adaptativo-impulsivo [63] o control de orden superior [64]. La segunda modalidad comprende las técnicas que consideran no solo al oscilador caótico sino también la topología, la cual tiene un papel crucial en el proceso que se desarrolla, y entre las que se encuentran la técnica Wang-Chen que emplea la matriz de acoplamiento, la función maestra de estabilidad y el método de la red con conexiones generalizadas [65–68], por mencionar las más relevantes.

Numerosos estudios han mostrado la efectividad de estas últimas técnicas para sincronizar redes complejas, las cuales han sido compuestas por diferentes tipos de sistemas dinámicos, entre los que se encuentran el oscilador de fase de Kuramoto [69, 70], el oscilador de Van der Pol [71, 72], diferentes modelos de Redes Neuronales Celulares (Cellular Neural Network - CNN) [5, 73] y una gran variedad de osciladores que exhiben comportamiento caótico [74–76]. Los resultados de interés son aquellos obtenidos sobre redes complejas de mundo pequeño, la mayoría de los cuales centra su atención en el modelo del sistema que compone la red compleja. Tal es el caso de la Función Maestra de Estabilidad [66], por ejemplo, la cual fue originalmente desarrollada para determinar la estabilidad del estado sincronizado, a través de la diagonalización de la ecuación variacional, con el objetivo de obtener el exponente de Lyapunov más grande en función de los valores propios complejos de la matriz de acoplamiento, permitiendo así separar los efectos de la dinámica del sistema para ser estudiados bajo cualquier topología [66, 77, 78].

Por otra parte, en el modelo propuesto por X.F. Wang y G. Chen [65] para sincronizar una red compleja, se sugiere alcanzar la sincronía haciendo uso de la fuerza de acoplamiento, cuyo valor depende del tipo de sistema que compone la red compleja y de su topología, la cual es expresada a través de los valores propios de la matriz de acoplamiento. A pesar de que se ha demostrado su eficacia en el proceso de sincronizar redes complejas de diferentes tipos, cuando la topología es de mundo pequeño, para condiciones donde se modifica una pequeña fracción de los enlaces, es decir, la probabilidad de recablearlos o agregarlos es $p \approx 0$, puede generarse

una condición que produce una fuerza de acoplamiento en ocasiones excesivamente grande. Además de esto, la dificultad y el tiempo requerido para el cálculo del segundo valor propio de la matriz de acoplamiento, necesario para la obtención del acoplamiento, es proporcional al tamaño de la red compleja. Estas son sin duda las principales desventajas de esta técnica. Sin embargo, su efectividad es indiscutible cuando se emplean redes complejas del tipo estructural (Sección 1.4.2, Fig. 1.5 a) [79–81].

A. Pogromsky y H. Nijmeijer propusieron un esquema para sincronizar sistemas dinámicos, los cuales deben cumplir un enfoque de pasividad y fase mínima [68, 82], para garantizar que la solución de los sistemas acoplados esté acotada, lo que garantiza que el estado sincronizado de la red puede alcanzarse una vez excedido el umbral del mínimo acoplamiento [68].

Finalmente, el método de la red con conexiones generalizadas, propuesto por I. Belykh y colaboradores [67] para estudiar sincronización global completa de una red compleja dirigida, sugiere transformar las conexiones unidireccionales en bidireccionales y ponderar cada una de estas con la mitad de la fuerza de acoplamiento original, para generar una red equivalente no dirigida. Aunque el método ha mostrado efectividad, está limitado a redes dirigidas pequeñas que presenta una topología uniforme en árbol; para redes complejas de gran tamaño, el método presenta dificultades en encontrar los caminos más cortos a través de los enlaces unidireccionales a ser reemplazados [67]. Con esto se concluye el capítulo introductorio de este trabajo.

El resto del escrito está organizado como sigue: En el Capítulo 2 se describen los modelos dinámicos de los sistemas no lineales que serán usados para componer las redes complejas, los cuales son osciladores caóticos generadores de atractores de múltiples enrollamientos. En el Capítulo 3 se describen las redes complejas con topología de mundo pequeño, así como los dos algoritmos existentes más importantes. En este capítulo también se presenta la propuesta alternativa para generar redes complejas de mundo pequeño, la cual es una de las aportaciones más importantes de este trabajo. Los resultados de sincronización de las redes complejas de mundo pequeño, generadas con los tres algoritmos que se describen, se proporcionan en el Capítulo 4. El Capítulo 5 presenta las conclusiones pertinentes y los trabajos futuros.

Capítulo 2

Osciladores caóticos de múltiples enrollamientos

En el presente capítulo se describen a detalle los sistemas dinámicos no lineales, que para este caso en particular, son osciladores caóticos generadores de atractores con múltiples enrollamientos, los cuales se usarán para constituir las redes complejas de mundo pequeño descritas en el Capítulo 3.

En la literatura científica se dispone de una variedad significativa de osciladores caóticos reportados. En esta investigación, nuestro interés recae en aquellos capaces de generar atractores caóticos de múltiples enrollamientos, cuyo ejemplo más básico es el ampliamente conocido y estudiado oscilador caótico de Chua [83], del cual se han realizado múltiples generalizaciones con base en dos categorías: aquellas en las que se modifica su característica no lineal y aquellas en las que se aumenta el número de variables de estado del sistema [84].

A continuación, se describen los modelos dinámicos que se emplearon en esta investigación como generadores de atractores de múltiples enrollamientos.

2.1 Oscilador caótico de Chua generalizado

El oscilador de Chua es un modelo no lineal de dinámica caótica que se ha convertido en un paradigma para el estudio del caos. El oscilador de Chua se ha estudiado extensamente desde su aparición alrededor de 1983, como resultado de esto, diferentes generalizaciones han sido propuestas. De las dos vertientes que se han seguido para la obtención de una generalización del oscilador de Chua, una de las más

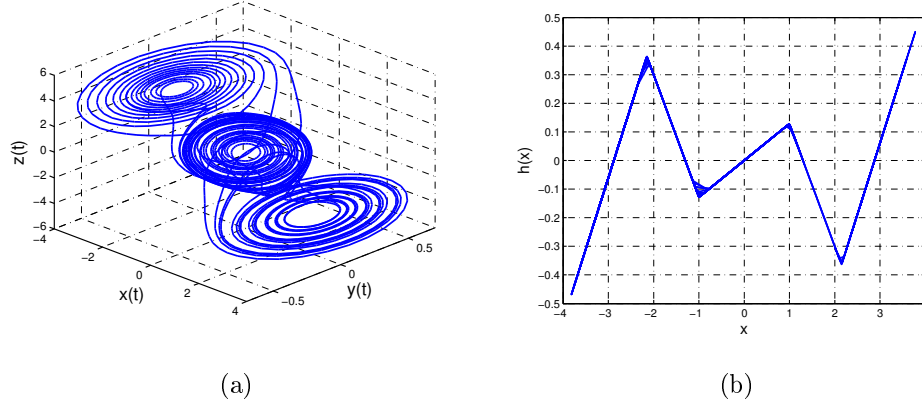


Fig. 2.1: **(a)** Atractor caótico del oscilador de Chua generalizado para $\alpha = 9$, $\beta = 100/7$, $q = 2$, $m = [0.9/7, -3/7, 3.5/7, -2.4/7]$ y $b = [1, 2.15, 4]$. **(b)** Función no lineal de la ecuación (2.2) para $q = 2$.

estudiadas se relacionada con la introducción de puntos de quiebre adicionales en la no linealidad [83,85].

El modelo matemático, que describe el oscilador caótico de Chua generalizado, está dado por el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha [y - h(x)], \\ \dot{y} = x - y + z, \\ \dot{z} = -\beta y, \end{cases} \quad (2.1)$$

con una característica lineal a trozos dada por:

$$h(x) = m_{2q-1}x + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2q-1} (m_{i-1} - m_i)(|x + b_i| - |x - b_i|). \quad (2.2)$$

El oscilador (2.1) exhibe una dinámica caótica para valores de parámetros $\alpha = 9$ y $\beta = 100/7$ [83,85]. Se puede ver que la ecuación (2.2) está compuesta por múltiples puntos de quiebre, donde q denota un número natural. El oscilador caótico de Chua generalizado (2.1) está descrito por tres escalares y dos vectores de parámetros $\{\alpha, \beta, q, m, b\}$, donde $m = [m_0 \ m_1 \ \dots \ m_{2q-1}]$, $b = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_{2q-1}]$.

En la Fig. 2.1 (a) se muestra un ejemplo del atractor caótico generado con las ecuaciones (2.1), al que corresponde la función no lineal de la Fig. 2.1 (b) para $q = 2$, en la que pueden apreciarse diferentes puntos de quiebre.

En la Tabla 2.1 se proporcionan tres ejemplos de parámetros para generar diferente número de enrollamientos con el oscilador caótico (2.1). Para los lectores interesado en más opciones de parámetros favor de referirse a [83,85].

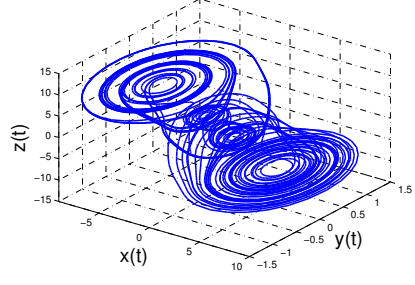
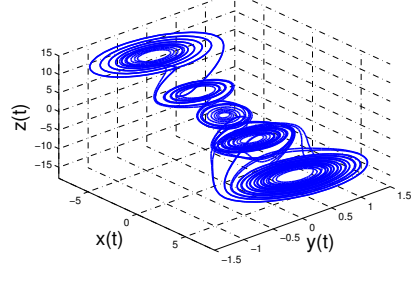
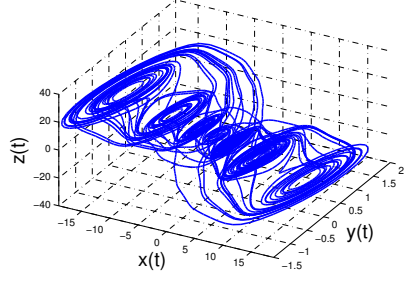
Parámetros	Atractor caótico
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 9, \\ \beta = 100/7, \\ q = 2, \\ b = [1, 2.15, 4], \\ m = [0.9/7, -3/7, 3.5/7, \\ \quad -2.4/7]. \end{array} \right.$	 <p>Fig. 2.2: Atractor caótico de 4 enr. usando $\mathbf{x}(0) = [0.9, -0.8, -1]$.</p>
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 9, \\ \beta = 100/7, \\ q = 3, \\ b = [1, 2.15, 3.6, 6.2, 9], \\ m = [0.9/7, -3/7, 3.5/7, \\ \quad -2.7/7, 4/7, -2.4/7]. \end{array} \right.$	 <p>Fig. 2.3: Atractor caótico de 5 enr. usando $\mathbf{x}(0) = [-0.1, 0.1, 0.1]$.</p>
$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 11.6047522, \\ \beta = 15, \\ q = 4, \\ b = [1, 2.15, 3.6, 6.2, \\ \quad 9, 14, 25], \\ m = [0.9/7, -3/7, 3.5, \\ \quad -2.4/7, 0.36, -0.24, \\ \quad 2.52/7, -0.24]. \end{array} \right.$	 <p>Fig. 2.4: Atractor caótico de 7 enr. usando $\mathbf{x}(0) = [-0.1, 0.1, -0.2]$.</p>

Tabla 2.1: Parámetros y su modalidad del atractor caótico generado con el conjunto de ecuaciones (2.1) para valores reportados en [83, 85].

En lo que resta del capítulo se describe otra familia de osciladores caóticos, capaz de generar múltiples enrollamientos a lo largo todas sus variables de estado, al cual por simplicidad llamaremos oscilador caótico de Genesio–Tesi 3D.

2.2 Oscilador caótico de Genesio–Tesi 3D

El oscilador caótico que estamos por describir, pertenece a la familia de osciladores que genera enrollamientos en reja, reportada originalmente como *una nueva familia de atractores con n-enrollamientos* [83, 84]. De los diferentes modelos disponibles de esta familia, centraremos nuestra atención en aquel capaz de generar múltiples enrollamientos a lo largo de todas sus variables de estado, el cual es una generalización del modelo original, propuesto por R. Genesio y A. Tesi en 1992, para examinar el método del balance armónico y determinar la existencia y localización del comportamiento caótico [83, 84, 86], y al que llamaremos oscilador caótico de Genesio–Tesi 3D.

La generalización del oscilador caótico de Genesio–Tesi consiste en la introducción de funciones no lineales en cada una de sus variables de estado, creando así un modelo capaz de generar múltiples enrollamientos a lo largo de cualquiera de ellas. El oscilador de Genesio–Tesi 3D está descrito por las siguientes ecuaciones diferenciales [83, 84]:

$$\begin{cases} \dot{x} = y - f_1(y), & f_1(y) = \sum_{i=1}^{M_y} g_{\frac{(-2i+1)}{2}}(y) + \sum_{i=1}^{N_y} g_{\frac{(2i-1)}{2}}(y), \\ \dot{y} = z - f_2(z), & f_2(z) = \sum_{i=1}^{M_z} g_{\frac{(-2i+1)}{2}}(z) + \sum_{i=1}^{N_z} g_{\frac{(2i-1)}{2}}(z), \\ \dot{z} = -a(x + y + z - f_3(x)), & f_3(x) = \sum_{l=1}^{k-1} \gamma g_{n_l}(x). \end{cases} \quad (2.3)$$

Donde $a = 0.8$, $g_\theta(\bullet)$ es la función núcleo y está definida como sigue:

$$g_\theta(\bullet) = \begin{cases} 1, & \bullet \geq \theta, \theta > 0, \\ 0, & \bullet < \theta, \theta > 0, \\ 0, & \bullet \geq \theta, \theta < 0, \\ -1, & \bullet < \theta, \theta < 0. \end{cases} \quad (2.4)$$

Para $f_3(x)$ se tiene que

$$\begin{cases} n_l = \rho + 0.5 + (l - 1)(\rho + \varsigma + 1), \\ \gamma = \rho + \varsigma + 1, \\ \rho = \lfloor \min_{i,j} \{u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z}\} \rfloor, \\ \varsigma = \lfloor \max_{i,j} \{u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z}\} \rfloor. \end{cases} \quad (2.5)$$

Del conjunto de ecuaciones (2.5), $u_i^{eq,y}$ y $u_j^{eq,z}$ son los vectores para las variables y y z relacionados a los puntos de equilibrio. Los puntos de equilibrio del sistema

(2.3) se obtienen a partir de

$$\begin{cases} x + y + z &= f_3(x), \\ y &= f_1(y), \\ z &= f_1(z), \end{cases} \quad (2.6)$$

y están dados por [83]:

$$\begin{cases} u^{eq,y} &= \{-M_y, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_y\}, \\ u^{eq,z} &= \{-M_z, \dots, -1, 0, 1, \dots, N_z\}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Finalmente, los puntos de equilibrio del sistema (2.3) resultan ser

$$v_{eq} = \{[(l-1)(\varsigma+1+\rho) - u^{eq,y} - u^{eq,z} \quad u^{eq,y} \quad u^{eq,z}]^T \mid i = 1, 2, \dots, M_y + N_y + 1; j = 1, 2, \dots, M_z + N_z + 1; l = 1, 2, \dots, k\}. \quad (2.8)$$

En la Tabla 2.2 se muestran algunas modalidades de atractores caóticos generados con el oscilador Genesio–Tesi 3D descrito por las ecuaciones (2.3).

Para concluir el capítulo, remarcaremos al lector que los modelos que acabamos de describir, los cuales son osciladores caóticos generadores de atractores con múltiples enrollamientos, serán usados para conformar las redes complejas de mundo pequeño que se sincronizan en el Capítulo 4. A continuación, damos paso a la descripción de las redes complejas de mundo pequeño, que es donde se describe la aportación principal de este trabajo.

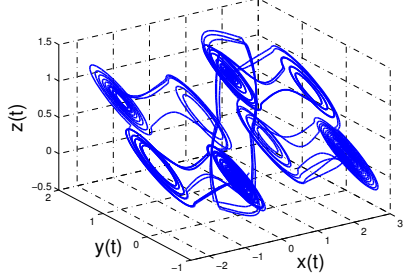
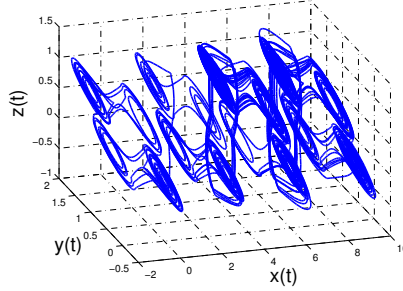
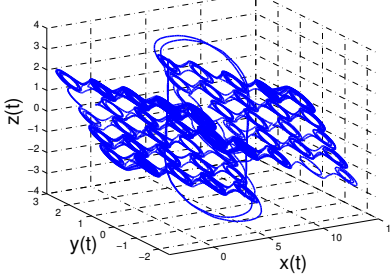
Parámetros	Atractor caótico
$\left\{ \begin{array}{l} a = 0.8, \\ M_y = 0, \\ N_y = 1, \\ M_z = 0, \\ N_z = 1, \\ k = 2. \end{array} \right.$	 <p data-bbox="803 697 1372 781">Fig. 2.5: Atractor caótico de $2 \times 2 \times 2$ enr. usando $\mathbf{x}(0) = [0.2, -0.1, 0.1]$.</p>
$\left\{ \begin{array}{l} a = 0.8, \\ M_y = 0, \\ N_y = 1, \\ M_z = 0, \\ N_z = 1, \\ k = 4. \end{array} \right.$	 <p data-bbox="803 1144 1372 1228">Fig. 2.6: Atractor caótico de $4 \times 2 \times 2$ enr. usando $\mathbf{x}(0) = [-0.3, 0.5, -0.1]$.</p>
$\left\{ \begin{array}{l} a = 0.8, \\ M_y = 2, \\ N_y = 2, \\ M_z = 2, \\ N_z = 2, \\ k = 2. \end{array} \right.$	 <p data-bbox="803 1591 1372 1675">Fig. 2.7: Atractor caótico de $2 \times 5 \times 5$ enr. usando $\mathbf{x}(0) = [0.6, 0.15, -0.9]$.</p>

Tabla 2.2: Parámetros y su modalidad del atractor caótico generado con el conjunto de ecuaciones (2.3) para algunos valores reportados en [83, 85].

Capítulo 3

Redes complejas de mundo pequeño

Las redes complejas de mundo pequeño tienen sus inicios en los años 1960, cuando Stanley Milgram llevó a cabo un experimento social que derivó en el ampliamente difundido concepto de *los seis grados de separación* [87]. De acuerdo con [12, 88], el experimento de Milgram consistió en la repartición aleatoria de cartas, cuyo destino era Boston, a personas en Nebraska que pudieran conocer al destinatario. Milgram descubrió que le tomaba un promedio de seis pasos a las cartas llegar de Nebraska a Boston. Con este resultado, S. Milgram concluyó que seis es el número promedio de conocidos que separa a la gente de todo mundo.

Las redes de mundo pequeño se volvieron muy populares después de que D.J. Watts y S.H. Strogatz publicaran el primer algoritmo que introduce esta propiedad a la topología de una red compleja regular. Watts y Strogatz mostraron exitosamente que la red compleja resultante cumplía con dos características principales: coeficiente de agrupamiento alto y longitud promedio del camino más corto baja [12]. Muchos investigadores centraron su atención en este tipo de redes durante los años posteriores, lo que resultó en un aumento de una buena cantidad de conocimiento sobre el tema.

3.1 Propiedad de mundo pequeño

A pesar de que el concepto de mundo pequeño fue derivado de un experimento social, numerosas son las aplicaciones en campos tan diversos como la ingeniería [89], la medicina [90] y la biología [91, 92], por mencionar algunos, lo que ha provocado que el tópico sea ampliamente estudiado en la actualidad.

La propiedad de mundo pequeño se refiere a la existencia de enlaces de largo alcance o atajos que conectan pares de nodos distantes en la red, en donde está implícito el concepto de los seis grados de separación, ya que se requiere un número bajo de pasos para alcanzar cualquier nodo de la red.

Las características de las redes complejas que se ven afectadas por esta propiedad son las siguientes: en primer lugar, *el coeficiente de agrupamiento*, el cual se refiere a la fracción promedio de pares de vecinos de un nodo, que son vecinos entre sí. c_i es el coeficiente de agrupamiento del nodo i y se define como el cociente entre el número E_i de enlaces reales existentes entre los k_i nodos vecinos de i y el número total $k_i(k_i - 1)/2$ de enlaces posibles, por lo tanto, el coeficiente de agrupamiento C de la red es el promedio de los c_i sobre todos los nodos i

$$C = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{2E_i}{k_i(k_i - 1)}, \quad (3.1)$$

donde N es el tamaño de la red. La Fig. 3.1 ejemplifica el cálculo del coeficiente de agrupamiento de una red compleja de $N = 8$ para un mejor entendimiento. El coeficiente de agrupamiento de la red, descrito por la ecuación (3.1), es $C = 0.4167$.

Por otro lado, *la longitud promedio del camino más corto L* se define como la distancia más corta promedio entre cualquier par de nodos de la red [28, 41, 93],

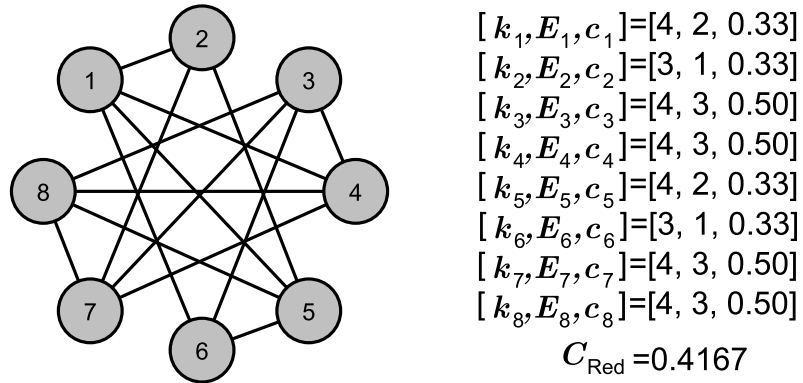


Fig. 3.1: Parámetros de cada nodo necesarios para el cálculo del coeficiente de agrupamiento, donde k_i es el número de vecinos del nodo i , E_i es el número de enlaces reales existentes entre sus k_i vecinos y c_i es el coeficiente de agrupamiento del nodo i que da como resultado un coeficiente de agrupamiento de la red de $C_{\text{Red}} = 0.4167$.

definida como sigue

$$L = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\forall i,j, i \neq j}^N \ell_{ij}, \quad (3.2)$$

donde ℓ_{ij} es la distancia más corta entre los nodos i y j . Considerando que para redes complejas no direccionas la distancia más corta del nodo i al nodo j es la misma que del j al i , y con fines de programación, la ecuación (3.2) puede simplificarse de la siguiente manera

$$L = \frac{2}{N(N-1)} \sum_{i=1}^{N-1} \sum_{j=i+1}^N \ell_{ij}, \quad (3.3)$$

donde se reduce de $N(N-1)$ caminos a obtener con la ecuación (3.2) a $N(N-1)/2$ con la ecuación (3.3). En la Fig. 3.2 se ejemplifica el cálculo de la longitud promedio del camino más corto de una red compleja empleando la ecuación (3.3) para $N = 6$.

Debido a la existencia de los enlaces de largo alcance, las redes complejas de mundo pequeño tienen coeficiente de agrupamiento $C(N, k, p)$ alto y una longitud promedio del camino más corto $L(N, k, p)$ baja.

La longitud promedio del camino más corto es sin duda la característica más investigada de este tipo de redes. Diferentes estudios han demostrado la influencia que tiene su disminución en el proceso de llevar a cabo una tarea específica. Algunas de las aplicaciones que han probado exitosamente sus beneficios incluyen la generación de memoria asociativa [94], aumento de capacidad de la memoria en redes neuronales [89], diseminación de información y epidemias [95–97].

A continuación, describiremos brevemente los dos algoritmos de mundo pequeño más importantes, para posteriormente dar paso a la descripción de nuestra

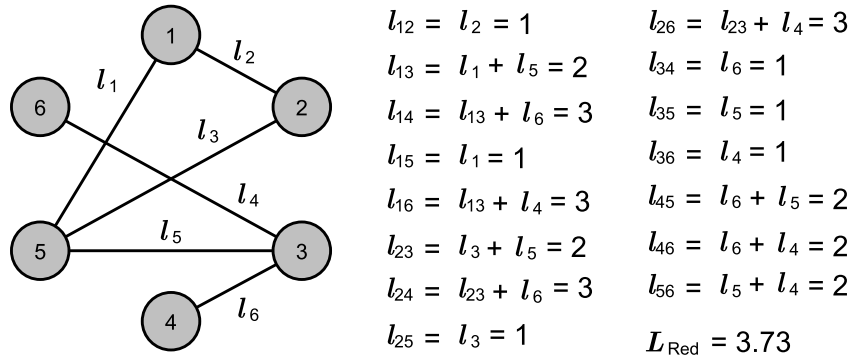


Fig. 3.2: Cálculo de la longitud promedio del camino más corto usando la ecuación (3.3) para $N = 6$, donde $\ell_i = 1$ para $1 \leq i \leq 6$.

aportación, la cual resulta ser una manera alternativa de introducir la propiedad de mundo pequeño.

3.2 Algoritmo de mundo pequeño Watts–Strogatz

En 1998 D.J. Watts y S.H. Strogatz propusieron un algoritmo para introducir la propiedad de mundo pequeño en una red regular [12]. La topología de dicha red compleja es la que se conoce como de vecino más cercano, que consiste en un arreglo en anillo con condiciones de conexión periódicas [14].

El modelo de mundo pequeño Watts–Strogatz se crea al recablear uno de los extremos de cierta cantidad de los enlaces existentes a posiciones nuevas, las cuales son elegidas aleatoriamente. Las restricciones que deben cumplirse para ajustarse al modelo son las siguientes:

1. El tamaño de la red permanece constante.
2. La cantidad de enlaces permanece constante.
3. Ningún nodo debe tener múltiples enlaces con otro.
4. Ningún nodo debe tener enlaces consigo mismo.
5. Cumplir la relación $N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$ para evitar grupos aislados [12],

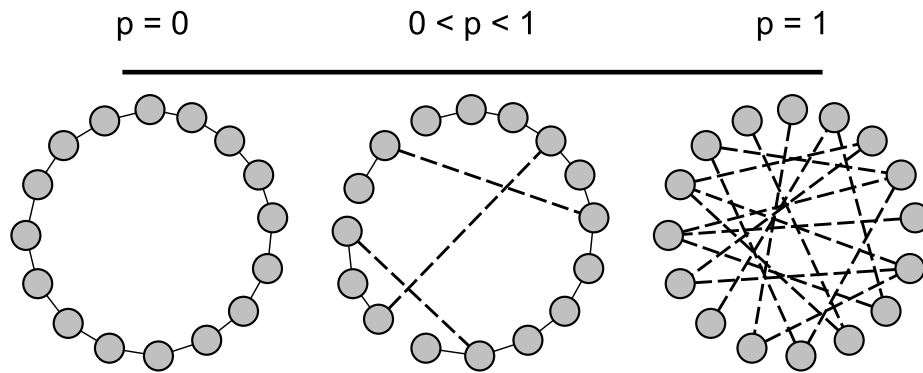


Fig. 3.3: Evolución del algoritmo de mundo pequeño de Watts–Strogatz. Las líneas sólidas son los enlaces en su posición original. Las líneas punteadas son los enlaces recableados a su nueva posición, elegida aleatoriamente.

donde N es el tamaño de la red compleja, k es la condición de conexión periódica, i.e., el nodo i está conectado con sus $i \pm 1, i \pm 2, \dots, i \pm k$ nodos vecinos; p es la probabilidad para recablear un enlace, por lo tanto,

$$Nkp, \quad (3.4)$$

son los enlaces de largo alcance que se pueden introducir a la topología. En la Fig. 3.3 se muestra la evolución del algoritmo de mundo pequeño de Watts–Strogatz, donde puede apreciarse que este tipo de redes complejas, son el intermedio entre las redes regulares y las aleatorias.

Cuando $p = 0$, la topología permanece sin cambio y la red compleja se considera regular. Cuando $0 < p < 1$ se obtiene una red compleja de mundo pequeño. En el punto en el que $p = 1$, todos los enlaces han sido recableados y la red compleja se ha convertido en una aleatoria. Un aspecto importante a considerar es el hecho de que este algoritmo puede llevar a la creación de grupos aislados.

En la Fig. 3.4 se muestra la evolución del coeficiente de agrupamiento, el cual presenta un pequeño decremento para $p \approx 0$ y continúa descendiendo en función de la probabilidad, hasta alcanzar un mínimo para $p = 1$. Por otro lado, la longitud promedio del camino más corto sufre un abrupto decremento para $p \approx 0$ y alcanza rápidamente un mínimo que conserva hasta alcanzar $p = 1$.

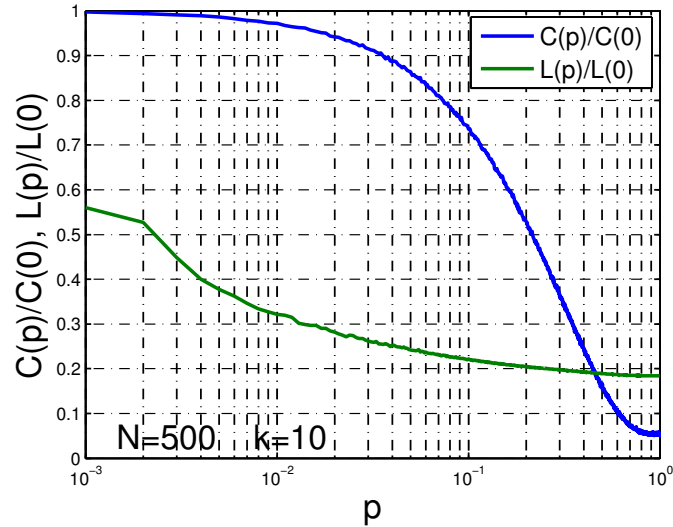


Fig. 3.4: Evolución del coeficiente de agrupamiento $C(p)$ y la longitud promedio del camino más corto $L(p)$ normalizados recableando conexiones, para una red $N = 500$ con condición de conexión $k = 10$.

Por último, se describen brevemente las ventajas y desventajas que pueden observarse en el algoritmo Watts–Strogatz, para proceder posteriormente a describir el algoritmo de Newman–Watts.

- Ventajas:

- $C(p)$ permanece casi sin cambio para valores de $p \approx 0$, que implica que la conectividad inicial entre nodos permanece.

- Desventajas:

- Dependiendo de la condición de conexión inicial k , se pierde alrededor del 90 % de $C(p)$ para $p \approx 1$ (Fig. 3.4), que implica escasa conectividad entre los nodos.
- Disminución de la longitud promedio del camino más corto en una proporción que puede superarse.
- La reconexión de enlaces puede llevar a la generación de grupos aislados.

3.3 Algoritmo de mundo pequeño Newman–Watts

Después de que Watts y Strogatz publicaron su algoritmo para generar redes complejas de mundo pequeño, una nueva versión surgió al año siguiente a la aparición de este trabajo pionero. En 1999, M.E.J. Newman y D.J. Watts propusieron su versión modificada del algoritmo de mundo pequeño original [13, 14].

El algoritmo de Newman–Watts, de igual manera que el algoritmo anterior, parte de la topología de vecino más cercano. La propiedad de mundo pequeño se introduce al agregar enlaces nuevos a pares de nodos elegidos aleatoriamente [13, 14]. Las restricciones de este algoritmo permanecen casi sin cambio, a excepción de la segunda, la cual es eliminada ya que el número de enlaces varía en función de la probabilidad. Aunque este algoritmo no genera grupos aislados, la quinta restricción se mantiene con el objetivo de partir de una red escasamente conectada.

Para determinar la cantidad de enlaces que se agregan a la red se considera lo siguiente:

- i). El nodo i está conectado con sus $2k$ nodos vecinos.

- ii). La cuarta restricción no permite que el nodo i tenga conexiones consigo mismo, por lo tanto, i solo puede conectar a los $N - (2k + 1)$ nodos restantes. Esto implica que para toda la red compleja tenemos $N(N - (2k + 1))$ conexiones restantes.
- iii). Al ser una red no direccionada y al estar prohibidas las conexiones múltiples entre pares de nodos, tenemos que $N(N - (2k + 1))/2$ son los enlaces restantes posibles.

Conforme se aplica el algoritmo de Newman–Watts y la probabilidad aumenta, se introducen en la red compleja

$$\frac{N(N - (2k + 1))p}{2}, \quad (3.5)$$

enlaces de largo alcance. En la Fig. 3.5 se muestra la evolución del algoritmo de mundo pequeño de Newman–Watts. Cuando $p = 0$, al igual que en el caso anterior, la topología permanece sin cambio y la red se considera regular. Cuando $0 < p < 1$ se obtiene una red compleja de mundo pequeño a través del agregado de enlaces a pares de nodos aleatoriamente elegidos. En el punto en el que $p = 1$ todos los enlaces posibles han sido agregados y la red compleja está acoplada en su totalidad.

En la Fig. 3.6 se muestra la evolución del coeficiente de agrupamiento, el cual muestra poco cambio para $p \approx 0$ y alcanza el máximo valor posible para probabilidades cercanas a uno. Por otro lado, la longitud promedio del camino

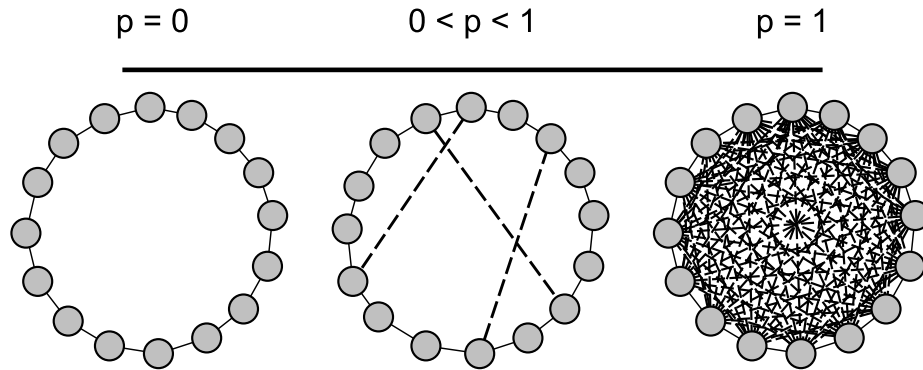


Fig. 3.5: Evolución del algoritmo de mundo pequeño de Newman–Watts. Las líneas sólidas son los enlaces en su posición original. Las líneas punteadas son los enlaces agregados en posiciones elegidas aleatoriamente.

más corto desciende considerablemente para $p \approx 0$ hasta alcanzar un mínimo que conserva hasta que $p = 1$.

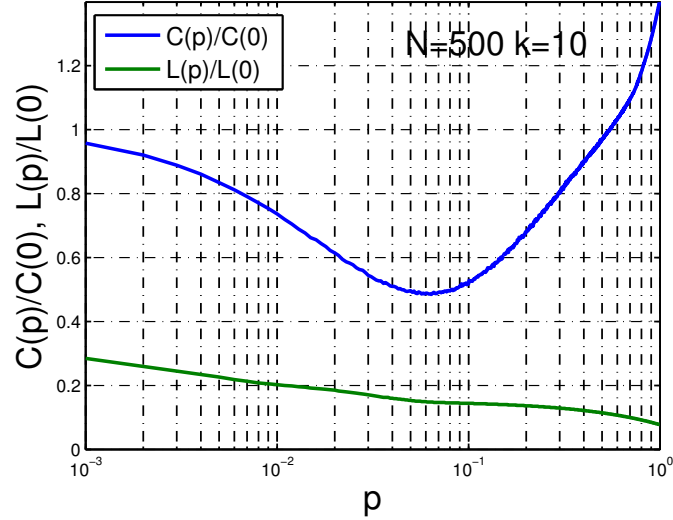


Fig. 3.6: Evolución del coeficiente de agrupamiento $C(p)$ y la longitud promedio del camino más corto $L(p)$ normalizados agregando conexiones, para una red $N = 500$ con condición de conexión $k = 10$.

Por último, se enlistan las ventajas y desventajas que pueden observarse en el algoritmo de Newman–Watts, para dar paso a la descripción del procedimiento propuesto para introducir la propiedad de mundo pequeño.

- Ventajas:

- Para $p \approx 1$ se alcanza el máximo $C(p)$ posible para una red compleja (Fig. 3.6).
- La longitud de camino más corto promedio disminuye en mayor proporción que usando Watts–Strogatz.
- No genera grupos aislados.

- Desventajas:

- Para $p \approx 0$ se pierde alrededor del 50 % de $C(p)$ (Fig. 3.6).
- Para alcanzar el máximo valor de $C(p)$, es necesario modificar la red en gran medida, es decir, se requiere $p \approx 1$.

3.4 Algoritmo de mundo pequeño propuesto

En la presente sección se describe el algoritmo que se propone como alternativa para introducir la propiedad de mundo pequeño a una red compleja. Se empieza con breve comparación de los algoritmos descritos, con la intención de generar una perspectiva de las características que hereda la metodología propuesta.

La ventaja más destacable del algoritmo de Watts–Strogatz es la invariabilidad que causa en el coeficiente de agrupamiento para $p \approx 0$, contrarrestada por la escasa conectividad que genera para $p \approx 1$. Aunque la longitud promedio del camino más corto sufre una disminución considerable para $p > 0$, se busca superar la magnitud de la disminución.

Por otro lado, el algoritmo de Newman–Watts presenta una disminución del coeficiente de agrupamiento, alrededor del 50 %, para valores intermedios de la probabilidad, justo antes de iniciar su ascenso hacia el máximo valor posible. Su longitud promedio del camino más corto presenta un decremento superior al del algoritmo de Watts–Strogatz.

En este punto, se considera pertinente recordarle al lector que propiciar el fenómeno de sincronización en la red, optimizando su capacidad de propagación a través de la reducción de la distancia promedio nodo a nodo, es uno de los objetivos del trabajo. Para este fin, se propone un algoritmo de mundo pequeño con las siguientes restricciones:

1. El tamaño de la red debe permanecer constante.
2. La red debe poder modelarse como un grafo simple.
3. Cumplir la relación $N \gg k \gg \ln(N) \gg 1$.
4. Restringir la condición de conexión a $k \leq 16\% N$.

La primera restricción permite conocer cómo varía la topología de la red en función de la probabilidad. La segunda restricción evita la existencia de enlaces múltiples entre pares de nodos y enlaces consigo mismo. La tercera restricción previene la existencia de grupos aislados. Por último, la cuarta restricción garantiza que las conexiones de largo alcance introducidas se ajuste a la ecuación (3.6).

La propiedad de mundo pequeño se introduce a la topología llevando a cabo los pasos descritos en el Algoritmo 1. En la Fig. 3.7 se muestra la evolución del algoritmo propuesto para reforzar la explicación del modelo alternativo.

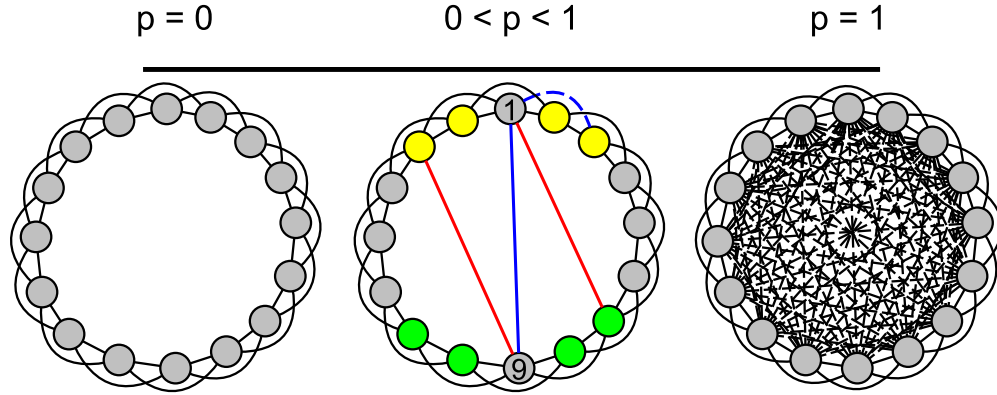


Fig. 3.7: Evolución del algoritmo de mundo pequeño propuesto que introduce $2Nkp$ triángulos, para amortiguar la pérdida de coeficiente de agrupamiento, generada por el recableo o agregado aleatorio de enlaces. En amarillo y verde los vecinos del nodo que envía y del que recibe la conexión, respectivamente. La línea sólida en azul es el enlace recableado y su posición original es la línea azul en guiones. Las líneas rojas son los enlaces agregados para generar dos triángulos por cada triada.

Algoritmo 1. Algoritmo para introducir la propiedad de mundo pequeño en una red compleja

1. Se inicia con una red en topología del vecino más cercano, donde se conoce el tamaño N y la condición de conexión k , Fig. 3.8.

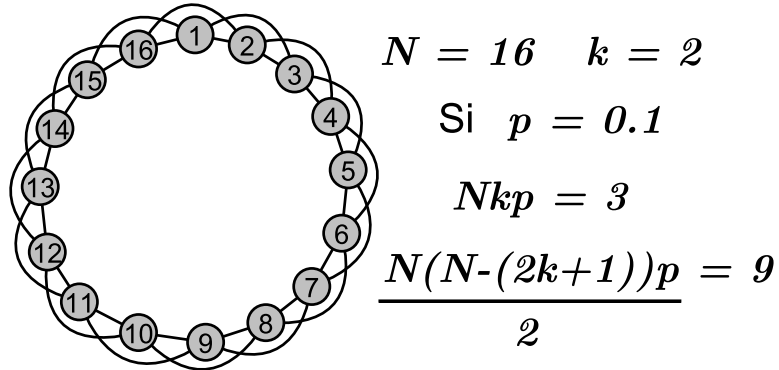


Fig. 3.8: Paso 1: Red compleja regular de $N = 16$ con condición de conexión $k = 2$.

2. Para un valor de probabilidad p determinado, recablear uno de los extremos de Nkp de los enlaces existentes a posiciones aleatoriamente elegidas, Fig. 3.9.

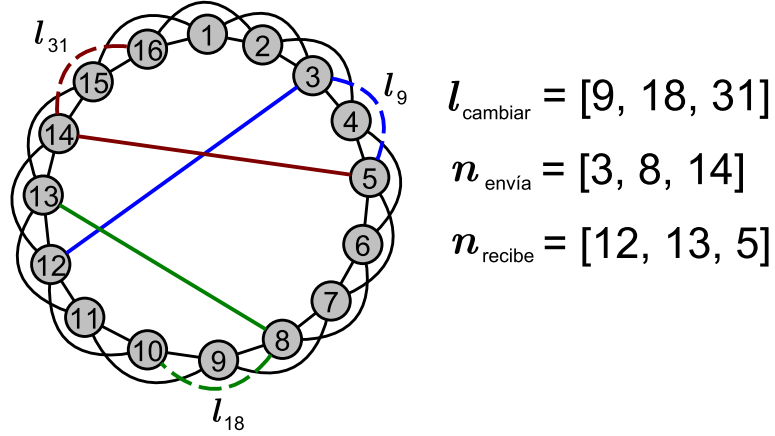


Fig. 3.9: Paso 2: Red compleja con tres conexiones recableadas en azul, verde y café (líneas sólidas) y su posición original en líneas punteadas.

3. Almacenar y discriminar el índice de los vecinos de los nodos que conectó el enlace recableado, Fig. 3.10.

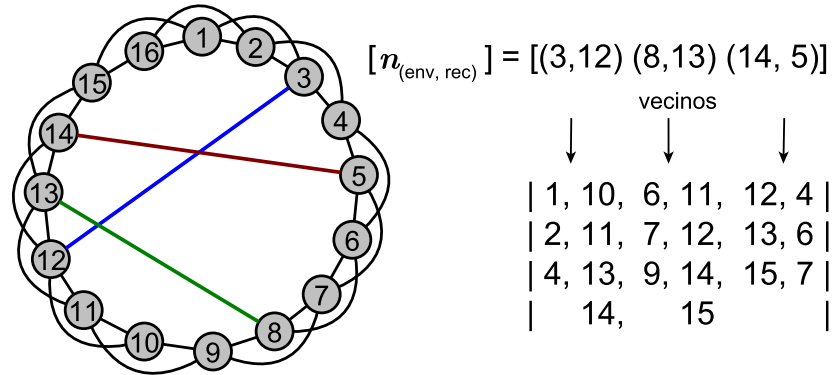


Fig. 3.10: Paso 3: Se identifican los vecinos de los nodos que conecta el enlace recableado.

4. Agregar 2 conexiones por cada una recableada como sigue, Fig. 3.11:
 - (a) Conectar el nodo que recibió la conexión con uno de los vecinos, elegido aleatoriamente, del nodo que la envía. Si todos los vecinos del nodo que envió la conexión ya son vecinos del nodo que la recibe, omitir el agregado.
 - (b) Conectar el nodo que envió la conexión con uno de los vecinos, aleatoriamente elegido, del nodo que la recibió. Si todos los vecinos del

nodo que recibió la conexión ya son vecinos del nodo que la envía, omitir el agregado.

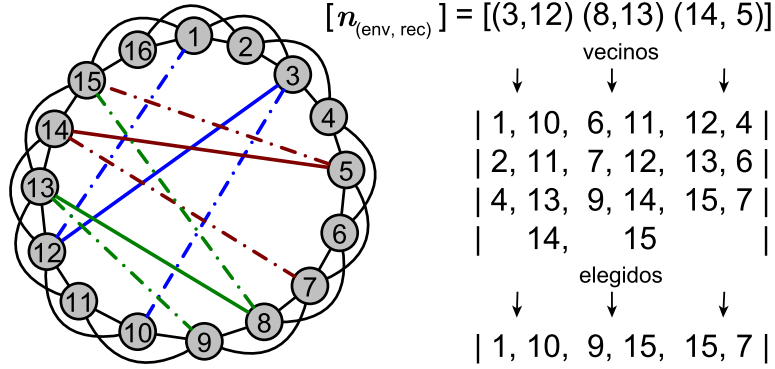


Fig. 3.11: Paso 4: Se agregan 2 conexiones (líneas en guión-punto) en el patrón descrito para introducir dos triángulos por cada enlace recableado.

5. Agregar aleatoriamente las $N(N - (2k + 1))p/2 - 2Nkp + \phi$ conexiones restantes, donde ϕ son el total de las conexiones omitidas, Fig. 3.12.

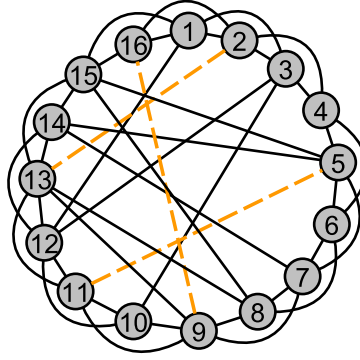


Fig. 3.12: Paso 5: Se agregan las $N(N - (2k + 1))p/2 - 2Nkp + \phi = 3$ conexiones restantes (líneas naranja) para completar el número inicialmente calculado.

Nota: Es altamente probable que $\phi = 0$ debido a las restricciones 3 y 4, sin embargo, al estar sujetos a la probabilidad, no se descarta que llegue a presentarse el suceso.

Con esta manera de generar redes complejas de mundo pequeño, se introducen a la topología

$$Nkp + \frac{N(N - (2k + 1))p}{2} = \frac{N(N - 1)p}{2}, \quad (3.6)$$

enlaces de largo alcance que conectan nodos distantes en la red compleja. De manera general, se puede apreciar que se agregan dos enlaces por cada uno de los que se recablean, por lo que es de suma importancia respetar la cuarta restricción, la cual previene condiciones en las que $N(N - (2k + 1))p/2 < 2Nkp$, cuyo punto crítico depende de la condición de conexión periódica k y el tamaño de la red N y se obtiene como sigue

$$\begin{aligned}
N(N - (2k + 1))p/2 &\geq 2Nkp, \\
N(N - 1)p - 2Nkp &\geq 4Nkp, \\
N(N - 1)p &\geq 6Nkp, \\
k &\leq N(N - 1)p/6Np, \\
k &\leq (N - 1)/6, \\
k &\leq 0.1667(N - 1) \approx 16.67\% N.
\end{aligned} \tag{3.7}$$

Como se puede ver, de igual manera que en los algoritmos descritos anteriormente, para $p = 0$ la red permanece sin cambio y es considerada regular. Para valores de $0 < p < 1$ la red presenta la propiedad de mundo pequeño. Esto se logra recableando cierta cantidad de enlaces, determinada por la probabilidad, a posiciones aleatoriamente elegidas. Ya fue mostrado (algoritmo Watts–Strogatz) que este procedimiento degrada el coeficiente de agrupamiento considerablemente. Por tal motivo, se pretende atenuar dicho efecto haciendo uso del agregado de enlaces, el cual mejora esta característica para $p \approx 1$. Sin embargo, el agregado aleatorio empeora para ciertos valores de la probabilidad lo que se pretende proteger, por lo que se introduce el patrón descrito para atenuar dicha pérdida. El resultado final es una red compleja de mundo pequeño con coeficiente de agrupamiento $C(N, k, p)$ y longitud promedio de camino más corto $L(N, k, p)$ similares a las características generadas por el algoritmo de Newman–Watts, pero con clara ventaja para propiciar el fenómeno de sincronía en la red compleja, como mostraremos en el Capítulo 4. Aunque es posible acentuar una disminución en $L(N, k, p)$ usando el algoritmo propuesto, sería necesario que $k \approx 16.67\% N$, que cumple con la restricción previamente establecida, sin embargo, para redes complejas grandes, esta condición de conexión resulta un valor alto, lo que puede llegar a ser inviable y corresponder poco con la realidad. Por último, cuando $p = 1$ la red se encuentra completamente acoplada y ha vuelto a ser regular.

En la Fig. 3.13 se ilustran el coeficiente de agrupamiento y la longitud promedio del camino más corto generados por el algoritmo descrito. Al comparar los efectos

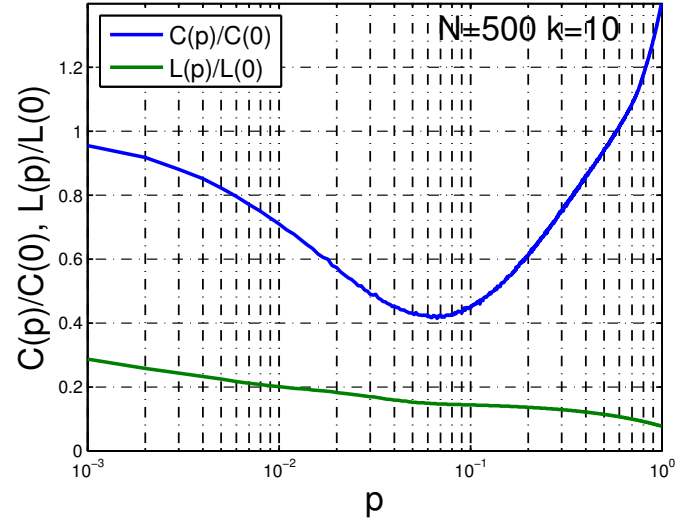


Fig. 3.13: Evolución del coeficiente de agrupamiento $C(p)$ y la longitud promedio del camino más corto $L(p)$ normalizados introduciendo triángulos en la topología, a través del recableado y agregado de enlaces en una red $N = 500$ con condición de conexión $k = 10$.

del algoritmo Newman–Watts, se aprecia que el comportamiento predominante es producido por el agregado de las conexiones.

En la Fig. 3.14 se muestra la evolución del coeficiente de agrupamiento $C(N, k, p)$ producido por el algoritmo propuesto para diferentes valores de N y k . En la Fig. 3.14 (a) se observa que si se mantiene fijo el tamaño de la red N e incrementamos la condición de conexión k , el coeficiente de agrupamiento experimenta un aumento, ya que a mayor número de conexiones existentes en la red compleja, mayor conectividad existe entre los nodos. En la Fig. 3.14 (b) podemos notar que al fijar la condición de conexión k , si variamos el tamaño de la red N , el algoritmo propuesto produce un coeficiente de agrupamiento $C(N, k, p)$ mayor para valores menores de la probabilidad p . Esto se puede corroborar si comparamos la magnitud de la línea que corresponde a $N_5 = 500$, la cual cruza $C(N, k, p) = 0.5$ en $p \approx 0.2$, mientras que las correspondientes a $N_1 = 100$, $N_2 = 200$ y $N_3 = 300$, requieren que $p = 0.5$.

La Fig. 3.15 muestra el comportamiento de la longitud promedio del camino más corto $L(N, k, p)$ normalizado en $L(N, k, 0)$ para diferentes valores del tamaño de la red compleja N y la condición de conexión periódica k .

En la Fig. 3.15 (a) se puede ver que al dejar fija la condición de conexión

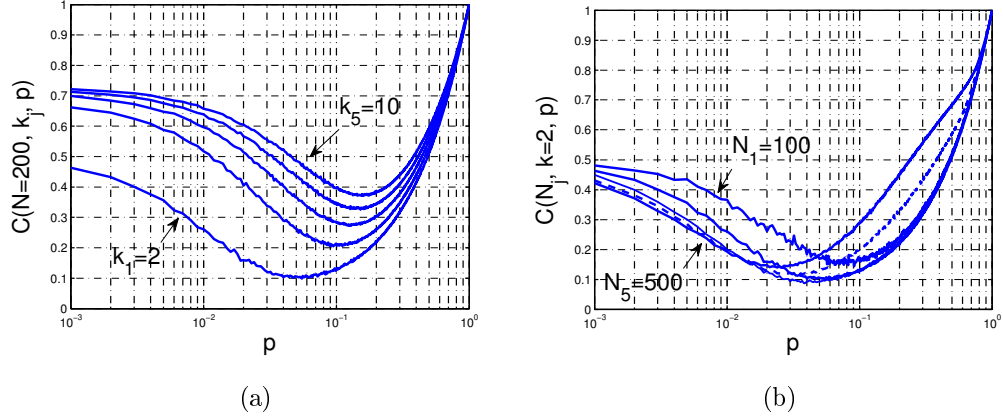


Fig. 3.14: **(a)** Coeficiente de agrupamiento $C(N, k, p)$ generado por el algoritmo propuesto para una red compleja compuesta por $N = 200$ con condición de conexión periódica $k_j = 2, 4, 6, 8, 10$, donde $1 \leq j \leq 5$. **(b)** Coeficiente de agrupamiento $C(N, k, p)$ generado por el algoritmo propuesto en una red compleja con condición de conexión periódica $k = 2$, para los tamaños $N_j = 100, 200, 300, 400, 500$ donde $1 \leq j \leq 5$.

periódica k y variar el tamaño de la red compleja N , se requieren más pasos para conectar cualquier par de nodos de la red compleja. Esto es congruente con lo que sucede con los otros algoritmos de mundo pequeño, sin embargo, el aumento es inferior cuando se usa la metodología propuesta o Newman–Watts.

Por otro lado, la Fig. 3.15 (b) muestra la evolución de $L(N, k, p)$ para diferentes valores de la condición de conexión periódica k . Se puede apreciar que al fijar el tamaño de la red compleja N y aumentar gradualmente la condición de conexión, los nodos pueden comunicarse con mayor facilidad debido a la existencia de una mayor cantidad de enlaces.

En el Capítulo 4, se emplearán los tres algoritmos descritos para introducir la propiedad de mundo pequeño en redes complejas de diferentes tamaños. El objetivo es determinar los efectos, tanto de esta propiedad como del patrón de conexión introducido a través del algoritmo propuesto, en el proceso de llevar una red compleja a la sincronía, teniendo en cuenta que la reducción de la distancia promedio más corta entre pares de nodos, así como la propagación eficaz de las dinámicas caóticas a lo largo de la red compleja, nos permitirá propiciar el fenómeno y por lo tanto, será posible emplear un esfuerzo de acoplamiento menor, lo que generaría una ley de control menos invasiva.

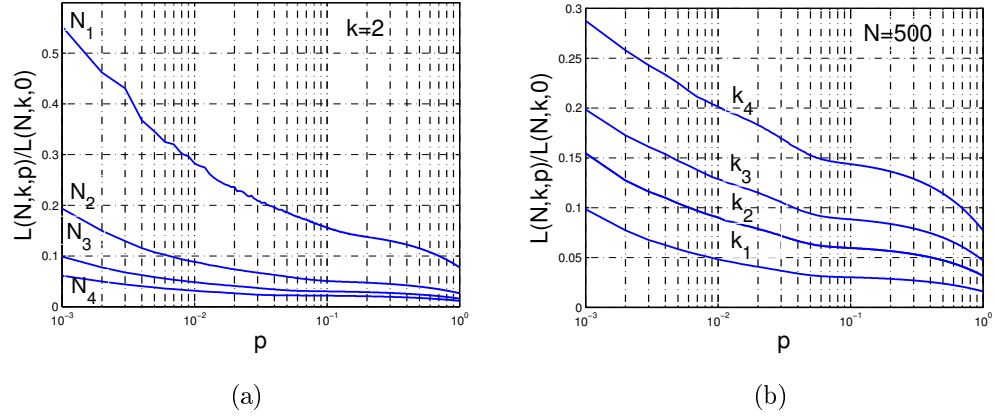


Fig. 3.15: **(a)** Longitud promedio del camino más corto $L(N,k,p)$ generado por el algoritmo propuesto en una red compleja con condición de conexión periódica $k = 2$ para los tamaños $N_j = 100, 300, 500, 700$, donde $1 \leq j \leq 4$. **(b)** Longitud promedio del camino más corto $L(N,k,p)$ para una red compleja compuesta por $N = 500$ con condición de conexión periódica $k_j = 2, 4, 6, 10$, donde $1 \leq j \leq 4$.

Con esto se concluye el presente capítulo, y se da paso a la presentación de los resultados de sincronización.

Capítulo 4

Sincronización caótica de redes complejas de mundo pequeño

En este capítulo se proporcionan los preliminares matemáticos necesarios para comprender la sincronización de las redes complejas. Se presentan también los resultados de las simulaciones numéricas de la sincronización de redes complejas de mundo pequeño, generadas con los algoritmos descritos en el Capítulo 3.

De manera general, se han venido llamando nodos a los elementos que componen a las redes complejas, sin embargo, a partir de este punto serán referidos como osciladores caóticos. Por lo tanto, en este capítulo se presenta la sincronización de redes complejas que exhiben la propiedad de mundo pequeño en su topología, cuyos elementos son osciladores caóticos, los cuales son capaces de generar atractores de múltiples enrollamiento y fueron descritos en el Capítulo 2.

4.1 Preliminares matemáticos

En el Capítulo 1, Sección 1.4.3 ya fue descrito de manera general el concepto de sincronía, sin embargo, debido a que los sistemas que forman la red compleja exhiben comportamiento caótico, es preciso proporcionarlo con el enfoque de dicho régimen.

La **sincronización de caos** se presenta cuando dos o más sistemas caóticos ajustan su movimiento a un comportamiento común, esto debido a un acoplamiento o forzamiento [98]. Los tipos de sincronización caótica más conocidos son:

- **Sincronización idéntica (SI)** [98, 99]: consiste en un enganche perfecto de las trayectorias de los sistemas, logrado a través del acoplamiento [98], definida

como sigue:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0. \quad (4.1)$$

- **Sincronización aproximada (SA)** [98, 99]: se refiere a la diferencia asintótica, existente entre el conjunto de variables de un sistema caótico y el correspondiente conjunto de otro, atrapada dentro de una cota previamente establecida [98], representada de la siguiente manera:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| < \rho, \quad \rho > 0. \quad (4.2)$$

- **Sincronización parcial (SP)** [99, 100]: se dice que dos sistemas caóticos están parcialmente sincronizados si al menos uno de sus estados alcanza sincronización idéntica o aproximada y al menos uno de ellos no sincroniza de manera idéntica o aproximada.

En este trabajo de tesis se pretende alcanzar sincronización idéntica, ya que de acuerdo con su definición matemática, implica mayor exigencia que la sincronización aproximada; por otro lado, estamos interesados en usar osciladores caóticos idénticos, lo que deja abierta la posibilidad de que se presente sincronización parcial.

4.1.1 Modelo de red compleja y su sincronización

Considere una red dinámica compuesta por N osciladores caóticos idénticos, los cuales se encuentran linealmente acoplados y cada uno es un sistema dinámico de dimensión n . Las ecuaciones de estado de la red están dadas por:

$$\dot{\mathbf{x}}_i = f(\mathbf{x}_i) + c \sum_{j=1}^N \mu_{ij} \mathbf{\Gamma} \mathbf{x}_j, \quad \mathbf{x}_i(0), \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3)$$

donde $\mathbf{x}_i = [x_{i1} \ x_{i2} \ \dots \ x_{in}] \in \mathfrak{R}^n$ es el vector de estados del oscilador caótico i . $\mathbf{x}_i(0)$ representa el vector de condiciones iniciales del oscilador caótico i . La constante $c > 0$ representa la fuerza de acoplamiento de la red compleja y $\mathbf{\Gamma} \in \mathfrak{R}^{n \times n}$ es una matriz constante de 0-1's que relaciona las variables de estado acopladas. Se asume para mayor simplicidad $\mathbf{\Gamma} = \text{diag}(r_1, r_2, \dots, r_n)$ que es una matriz diagonal con $r_i = 1$ para una i en particular y $r_j = 0$ para $j \neq i$, lo que significa que dos nodos están acoplados a través de su i -ésima variable de estado.

La topología de la red compleja se representa matemáticamente a través de la matriz de acoplamiento $\mathbf{M} \in \mathfrak{R}^{N \times N}$, con elementos μ_{ij} para $i, j = 1, \dots, N$, donde

$\mu_{ij} = 1$ si existe conexión entre el oscilador caótico i y el oscilador caótico j , en caso contrario $\mu_{ij} = 0$ ($i \neq j$). Los elementos de la diagonal principal de \mathbf{M} están definidos como sigue:

$$\mu_{ii} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mu_{ij} = - \sum_{j=1, j \neq i}^N \mu_{ji}, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (4.4)$$

La red dinámica descrita por la ecuación (4.3) se dice que logra sincronización (asintótica) si:

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t), \quad t \rightarrow \infty, \quad (4.5)$$

dado que la sincronización del estado es la solución $s(t) \in \mathbb{R}^n$ de un oscilador caótico aislado, esto es

$$\dot{s}(t) = f(s(t)), \quad (4.6)$$

donde $s(t)$ puede ser un punto de equilibrio, una órbita periódica o un atractor caótico. La estabilidad de la sincronización del estado

$$x_1(t) = x_2(t) = \dots = x_N(t) = s(t), \quad (4.7)$$

de la red (4.3) está determinada por la dinámica de un oscilador caótico aislado, la fuerza de acoplamiento c , la matriz que relaciona los estados acoplados $\mathbf{\Gamma}$ y la matriz de acoplamiento \mathbf{M} [65].

En este trabajo de tesis, la sincronía estará garantizada por un estudio de estabilidad del error de sincronización entre pares de osciladores caóticos, el cual al estar en función de la fuerza de acoplamiento c , permite obtener al menos la cota mínima necesaria para llevar a las trayectorias a su punto de equilibrio.

4.2 Resultados de sincronización caótica

A continuación, se presentarán los resultados de la sincronización de redes complejas de mundo pequeño. Para propósitos comparativos, se emplearon los tres algoritmo descritos en el Capítulo 3 para los casos siguientes: primeramente, se sincronizan dos redes complejas de mundo pequeño compuestas por el oscilador caótico Chua generalizado, descrito por el conjunto de ecuaciones (2.1), para condiciones de $N_{1,2} = 100, 400$ y $k = 1, 2, 5$, buscando la sincronía desde $p > 0$. Posteriormente, se empleó el oscilador caótico de Genesio–Tesi 3D, descrito por las ecuaciones (2.3)-(2.5), para conformar el siguiente grupo de resultados, donde se usó $N_{1,2} = 300, 500$ y $k = 1, 2, 5$, barriendo nuevamente la probabilidad desde $p > 0$.

Es importante mencionar que la sincronía entre los osciladores caóticos se estará corroborando de manera gráfica, ya sea a través del plano de fase (línea a $45^\circ \rightarrow x(t) = \hat{x}(t)$) entre las variables correspondientes de los osciladores caóticos involucrados, verificando la evolución en el tiempo de los estados o analizando las trayectorias del sistema dinámico del error de sincronización, el cual garantiza que la expresión $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - \hat{x}(t)\| = 0$ se cumple.

4.2.1 Caso 1: sincronización usando Chua generalizado

En esta sección se presentan los resultados numéricos de la sincronización de redes complejas de mundo pequeño, las cuales están formadas por $N_1 = 100$ (caso 1a) y $N_2 = 400$ (caso 1b) osciladores caóticos de Chua generalizado. De acuerdo con la ecuación (4.3) y el modelo dinámico del oscilador caótico usado (2.1), las ecuaciones de estado de cada una de las redes complejas están dadas por

$$\begin{cases} \dot{x}_i &= \alpha [y_i - h(x_i)] + c \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x_i, \\ \dot{y}_i &= x_i - y_i + z_i, \\ \dot{z}_i &= -\beta y_i, \end{cases} \quad (4.8)$$

con la característica lineal a trozos siguiente:

$$h(x_i) = m_{2q-1} x_i + \frac{1}{2} \sum_{l=1}^{2q-1} (m_{l-1} - m_l) (|x_i + b_l| - |x_i - b_l|), \quad (4.9)$$

para $1 \leq i \leq N_{1,2}$. Las condiciones iniciales para cada oscilador caótico de las redes son generadas, aleatoriamente y sin repetición, en el rango de $[-10, 10]$. La matriz que relaciona los estados acoplados se definió como $\Gamma = \text{diag}(1, 0, 0)$, lo que implica que cada oscilador caótico está acoplado a través de su variable de estado $x(t)$. Nótese que el único parámetro desconocido es la fuerza de acoplamiento c , la cual se obtiene como se describe enseguida.

4.2.1.1 Cálculo de la fuerza de acoplamiento para el oscilador de Chua generalizado

A continuación, se describe el procedimiento utilizado para calcular la fuerza de acoplamiento necesaria para sincronizar la red compleja, descrita por el conjunto de ecuaciones (4.8), y que fue propuesto en [2]. Este método se basa en la teoría de estabilidad de Lyapunov, lo que implica que solo provee condiciones suficientes

y por lo tanto, no se deben descartar otros valor que puedan llevar a nuestra red a la sincronía. El objetivo general de este procedimiento, radica en un estudio de estabilidad del sistema dinámico del error de sincronización, obtenido entre cualquier par de osciladores caóticos de la red compleja. Se podrá apreciar que la estabilidad del sistema del error resultante estará determinada por la fuerza de acoplamiento c , lo que nos permite elegir el rango de la misma para garantizar la sincronización.

Consideramos cualquier par de oscilador caótico de la red compleja (4.8) que se encuentren acoplados, el error de sincronización entre sus variables de estado está dado por

$$\begin{cases} e_1 &= x_1 - x_2, \\ e_2 &= y_1 - y_2, \\ e_3 &= z_1 - z_2, \end{cases} \quad (4.10)$$

si se manipula el primer estado del oscilador caótico (2.1) de la siguiente manera

$$\dot{x} = -\alpha m_{2q-1}x + \alpha y - \alpha(m_{l-1} - m_l) \text{sat}(x) \quad l = 1, \dots, 2q - 1, \quad (4.11)$$

donde

$$\text{sat}(x) = \frac{1}{2} (|x + b_l| - |x - b_l|) \quad l = 1, \dots, 2q - 1, \quad (4.12)$$

y se considera como equivalencia la desigualdad [101]

$$| \text{sat}(x) - \text{sat}(y) | \leq | x - y |, \quad (4.13)$$

se obtiene el siguiente sistema dinámico del error de sincronización

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= -(\alpha m_{2q-1} + 2c)e_1 - \alpha(m_{i-1} - m_i) |e_1| + \alpha e_2, \\ \dot{e}_2 &= e_1 - e_2 + e_3, \\ \dot{e}_3 &= -\beta e_2. \end{cases} \quad (4.14)$$

Estudiamos la estabilidad del sistema descrito por las ecuaciones (4.14) a través de la teoría de estabilidad de sistemas perturbados. Se puede suponer que $x = 0$ es un punto de equilibrio del sistema (4.14) exponencialmente estable, obtenido estableciendo $\dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dot{e}_3 = 0$. A continuación, el sistema dinámico del error de sincronización (4.14) es visto como un sistema perturbado de la forma

$$\dot{x} = f(t, x) + g(t, x), \quad (4.15)$$

donde

$$\begin{cases} f(t, x) & \text{Sistema nominal,} \\ g(t, x) & \text{Perturbación.} \end{cases}$$

Se considera que $g(t, x)$ es una perturbación desvaneciente, es decir, $g(t, 0) = 0$. Además, cualquier función $g(t, x)$ que se desvanezca en el origen y sea localmente Lipschitz en x uniformemente en t para todo $t \geq 0$ en un vecindario acotado del origen, satisface la siguiente desigualdad [101]

$$\|g(t, x)\| \leq \gamma \|x\|, \quad \forall t \geq 0, \quad \forall x \in D. \quad (4.16)$$

Por lo tanto, es posible describir el sistema dinámico del error de sincronización como sigue

$$f(t, e) = \mathbf{A}e = \begin{bmatrix} -\rho_1 & \alpha & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -\beta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix}, \quad (4.17)$$

$$g(t, e) = \begin{bmatrix} \rho_2 |e_1| \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

donde

$$\begin{cases} \rho_1 &= (\alpha m_{2q-1} + 2c), \\ \rho_2 &= -\alpha(m_{i-1} - m_i) \quad i = 1, \dots, 2q-1, \end{cases} \quad (4.19)$$

obteniendo así

$$\dot{e} = f(t, e) + g(t, e). \quad (4.20)$$

A continuación, se presenta el estudio de estabilidad para el caso en el que el oscilador caótico de Chua generalizado, descrito por las ecuaciones (2.1), genera 5 enrollamiento con los parámetros proporcionados en el segundo caso de la Tabla 2.1.

Los valores propios de la matriz \mathbf{A} de la ecuación (4.17) son las raíces del polinomio que resulta de $\det(\lambda \mathbf{I} - \mathbf{A})$, dado por

$$\lambda^3 + (\alpha m_{2q-1} + 2c + 1)\lambda^2 + (\beta + \alpha m_{2q-1} + 2c - \alpha)\lambda + \beta \alpha m_{2q-1} + 2\beta c, \quad (4.21)$$

el cual está en función de la *fuerza de acoplamiento* c y los parámetros del sistema. Sustituyendo los parámetros del sistema en la ecuación (4.21), se obtiene que

$$\lambda^3 + \left(2c - \frac{73}{35}\right)\lambda^2 + \left(2c + \frac{11}{5}\right)\lambda + \left(\frac{200}{7}\right)c - \frac{2160}{49}, \quad (4.22)$$

de donde se determina que para $c \geq 5.2$, los valores propios de la matriz \mathbf{A} son negativos. Eligiendo $c = 7$, los valores propios de \mathbf{A} son $\lambda(\mathbf{A}) = \{-11.6709; -0.1217 \pm 3.6530i\}$, donde se aprecia $\text{Re}(\lambda_{1,2,3}(\mathbf{A})) < 0$, lo que implica

que \mathbf{A} es Hurwitz. El siguiente paso es encontrar la solución de la ecuación de Lyapunov $\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} = -\mathbf{I}$, de donde resulta que

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1.2322 & 1.4387 & -1.8543 \\ 1.4387 & 1.9737 & 0.035 \\ -1.8543 & 0.035 & 30.0856 \end{bmatrix}, \quad (4.23)$$

cuyos valores propios están dados por $\lambda(\mathbf{P}) = \{0.0426; 3.0445; 30.2044\}$.

La función candidata de Lyapunov $V(e) = \mathbf{e}^T\mathbf{P}\mathbf{e}$ satisface de manera particular las condiciones siguientes

$$\lambda_{\min}(\mathbf{P})\|e\|_2^2 \leq V(t, e) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{P})\|e\|_2^2, \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial V}{\partial e}\mathbf{A}\mathbf{e} = -\mathbf{e}^T\mathbf{Q}\mathbf{e} \leq -\lambda_{\min}(\mathbf{Q})\|e\|_2^2, \quad (4.25)$$

$$\left\| \frac{\partial V}{\partial e} \right\|_2 = \|2\mathbf{e}^T\mathbf{P}\|_2 \leq 2\|\mathbf{P}\|_2\|e\|_2 = 2\lambda_{\max}(\mathbf{P})\|e\|_2. \quad (4.26)$$

Ahora empleamos la función candidata de Lyapunov del sistema nominal como función candidata de Lyapunov para estudiar estabilidad del sistema perturbado. La derivada de $V(e)$ a lo largo del sistema perturbado (4.20) está dada por

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial e}f(t, e) + \frac{\partial V}{\partial e}g(t, e). \quad (4.27)$$

Comparando la ecuación (4.27) con (4.24)-(4.26) y usando el término de perturbación dado por (4.16), se obtiene para el sistema perturbado

$$\dot{V}(t, e) = \frac{\partial V}{\partial e}\mathbf{A}\mathbf{e} + \left\| \frac{\partial V}{\partial e} \right\| \|g(t, e)\| \leq -\eta_1\|e\|^2 + \eta_2\gamma\|e\|^2, \quad (4.28)$$

donde

$$\begin{cases} \eta_1 &= \lambda_{\min}(\mathbf{Q}) &= 1, \\ \eta_2 &= 2\lambda_{\max}(\mathbf{P}) &= 60.4088. \end{cases} \quad (4.29)$$

El término de perturbación $g(e)$ satisface $\|g(e)\| = |\rho_2||e_1| \leq |\rho_2|k_1\|e\|$, por lo tanto

$$\gamma = |\rho_2|k_1 < \frac{\eta_1}{\eta_2}, \quad (4.30)$$

para $0 < k_1 < 1$, donde $|\rho_2| = 0.3686$. La cota de $|e_1|$ es desconocida, sin embargo $|e_1|$ estará acotado siempre que la trayectoria de $\mathbf{e}(t)$ este confinada a un conjunto compacto [101]. Usando las ecuaciones (4.29) y (4.30), la expresión (4.28) se convierte en

$$\dot{V}(t, e) = -\|e\|_2^2 + 60.4088|\rho_2|k_1\|e\|_2^2, \quad (4.31)$$

de donde se deduce que $\dot{V}(e) < 0$ si

$$k_1 < \frac{1}{60.4088|\rho_2|} < \frac{\eta_1}{\eta_2}. \quad (4.32)$$

En la ecuación (4.32) se puede ver que la desigualdad se cumple con $k_1 < 0.0449$, por lo tanto, se concluye lo siguiente:

Suponiendo que $e = 0$ es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema nominal (4.17). Sea $V(t, e)$ una función de Lyapunov del sistema nominal que satisface (4.24)-(4.26) en $[0, \infty) \times D$. Suponga que el término de la perturbación $g(t, e)$ satisface las ecuaciones (4.16) y (4.30). Entonces, el origen es un punto de equilibrio exponencialmente estable del sistema perturbado (4.20) [101].

A manera de resumen, resaltaremos los cuatro puntos más importantes del análisis presentado. En primer lugar, la generación de un sistema dinámico, descrito por las ecuaciones (4.14), que describe la evolución de la diferencia existente entre cualquier par de osciladores caóticos de la red compleja que se encuentren acoplados. En segundo lugar está el haberlo transformado en un modelo que se ajusta al de los sistemas perturbados de la forma (4.15), facilitando así estudiar su estabilidad. Como tercer punto y el más importante, destacamos el haber dejado la estabilidad del sistema nominal (4.17) en función de la fuerza de acoplamiento, lo que nos permitió obtener a través de la ecuación (4.22) la cota mínima de la fuerza de acoplamiento, la cual resultó en $c \geq 5.2$ y cuyo valor final se fijó en $c = 7$. Por último, el conocer el valor mínimo de la fuerza de acoplamiento nos permite generar matrices de coeficientes **A** Hurwitz, lo que simplifica el estudio de estabilidad del sistema perturbado a través de la solución de la ecuación de Lyapunov $\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T \mathbf{P} = -\mathbf{Q}$, la cual proporciona directamente las cotas, dadas por las ecuaciones (4.24)-(4.26), a cumplir por la función candidata $V(t, e)$, que posteriormente permiten determinar que $\dot{V}(t, e) < 0$.

Caso 1: sincronización usando Chua generalizado (continuación)

Como recordatorio para el lector, los resultados de la sincronización de la red compleja de mundo pequeño estaban por ser presentados, donde cada oscilador caótico está descrito por las ecuaciones (4.8). La matriz de acoplamiento se genera como se explicó en la Sección 4.1.1, para una topología de vecino más cercano con condiciones de conexión $k = 1, 2, 5$. Posteriormente, se le aplican por separado

los tres modelos de mundo pequeño descritos en el Capítulo 3, con los resultados marcados de la siguientes manera: para todos los casos se asignó **NS** para cuando la red compleja no sincroniza o el estado es inestable y se marcó en color rojo. La sincronización aproximada, donde $1 \times 10^{-4} < e(t) \leq 0.15$, estará denotada por **SA** en color anaranjado. A la sincronización idéntica, donde $e(t) \leq 1 \times 10^{-4}$, se le asignó **SI** y se resalta en color azul. A la sincronización parcial se le asignó **SP** y se marcó en color negro.

En la Tabla 4.1 (caso 1a) se muestran los resultados para la red compleja de $N_1 = 100$ osciladores caóticos Chua generalizado para diferentes condiciones de conexión. Cuando $k = 1$ podemos ver que el fenómeno de sincronía se presenta primero en la red compleja generada con el algoritmo propuesto, ya que para $p = 0.035$ se alcanza sincronización aproximada, cumpliendo con la cota del error ρ establecido, mientras que para este valor, no es posible sincronizar las redes complejas generadas con los algoritmos de Newman–Watts y Watts–Strogatz. Para lograr la sincronización idéntica es necesario que el algoritmo de Newman–Watts y el propuesto alcancen $p = 0.037$. Para este caso, los algoritmos presentan la misma efectividad para propiciar la sincronización idéntica. El algoritmo Watts–Strogatz genera un modelo de red compleja que no es posible sincronizar para $k = 1$.

Para $k = 2$, el algoritmo propuesto permite sincronizar idénticamente para $p = 0.021$. Para este caso, la red compleja pasa del estado no sincronizado al estado sincronizado, mientras que usando el algoritmo de Newman–Watts, es necesario pasar por la sincronización aproximada, para posteriormente lograr la sincronización idéntica, en un valor de probabilidad p mayor. El algoritmo de Watts–Strogatz no fue capaz de generar una red compleja que pudiera sincronizar para algún valor de p .

Cuando la condición de conexión $k = 5$, la red compleja de mundo pequeño, generada con el algoritmo propuesto, presenta una ligera ventaja sobre la generada con el algoritmo Newman–Watts, ya que es posible alcanzar la sincronización idéntica evitando agregar 5 enlaces. Como era de esperarse al aumentar la condición de conexión k , la probabilidad de transición del estado no sincronizado al estado sincronizado se vió reducida.

Para complementar la descripción de la eficiencia de los algoritmos, en las últimas dos filas de la Tabla 4.1, se proporcionan el número de enlaces recableados y/o agregados por cada algoritmo para la probabilidad en la que se alcanza la

Resultados de sincronización									
N	100 (Caso 1a)								
k	1			2			5		
\mathcal{A}_{mp}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}
0.000	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0.010	NS	NS	NS	NS	NS	NS	SA	NS	NS
0.012	NS	NS	NS	NS	NS	NS	SI	NS	NS
0.013	NS	NS	NS	NS	NS	NS	SI	SI	NS
0.021	NS	NS	NS	SI	NS	NS	SI	SI	NS
0.025	NS	NS	NS	SI	SA	NS	SI	SI	NS
0.030	NS	NS	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.033	NS	NS	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.035	SA	NS	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.036	SA	NS	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.037	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.040	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.120	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.130	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.140	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
0.300	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
0.500	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
\vdots	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
1.0	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
Recableadas	4	–	0	4	–	0	6	–	70
Agregadas	179	179	–	100	143	–	53	58	–

Tabla 4.1: Resultados de sincronización para $N = 100$ osciladores caóticos de Chua generalizado, con condición de conexión $k = 1, 2, 5$, usando los tres algoritmos de mundo pequeño, donde \mathcal{A}_p es el algoritmo propuesto, \mathcal{A}_{NW} es el algoritmo Newman–Watts y \mathcal{A}_{WS} para el algoritmo Watt–Strogatz.

sincronización idéntica.

Resultados de sincronización									
N	400 (Caso 1b)								
k	1			2			5		
\mathcal{A}_{mp} p	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}
0.000	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0.005	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS
0.0055	NS	NS	NS	NS	NS	NS	SI	NS	NS
0.006	NS	NS	NS	NS	NS	NS	SI	SA	NS
0.0061	NS	NS	NS	NS	NS	NS	SI	SI	NS
0.011	NS	NS	NS	SI	SA	NS	SI	SI	NS
0.013	SA	NS	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.015	SI	SA	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.018	SI	SA	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.020	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.050	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.100	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	NS
0.160	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.180	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.200	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
0.400	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
0.800	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
\vdots	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
1.0	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
Recableadas	6	–	0	9	–	0	11	–	400
Agregadas	1191	1588	–	869	1027	–	428	475	–

Tabla 4.2: Resultados de sincronización para $N = 400$ osciladores caóticos de Chua generalizado, con condición de conexión $k = 1, 2, 5$, usando los tres algoritmos de mundo pequeño, donde \mathcal{A}_p es el algoritmo propuesto, \mathcal{A}_{NW} es el algoritmo Newman–Watts y \mathcal{A}_{WS} para el algoritmo Watt–Strogatz.

Por otro lado, en la Tabla 4.2 (caso 1b), se muestran los resultados obtenidos para una red compleja de $N = 400$ con condiciones de conexión $k = 1, 2, 5$, formada por el oscilador caótico Chua generalizado. Cuando la condición de conexión $k = 1$, la red compleja generada con el algoritmo propuesto, presenta mayor facilidad para alcanzar la sincronización. Para este caso, la red pasó del estado no sincronizado al estado con sincronización aproximada cuando $p = 0.013$. La sincronización idéntica (SI en azul), es también alcanzada con mayor prontitud usando el algoritmo propuesto para una valor de probabilidad $p = 0.015$, mientras que para Newman–Watts, se necesita que $p = 0.02$. Si comparamos el Caso 1a (Tabla 4.1) y Caso 1b (Tabla 4.2) para $k = 1$, podemos ver que al aumentar el tamaño de la red compleja, el algoritmo propuesto mejora su habilidad para sincronizar en mayor proporción que el algoritmo Newmas–Watts, los cuales presentan eficiencias similares para redes pequeñas (Caso 1a cuando $k = 1$). El modelo de red generado por el algoritmo Watts–Strogatz no fue posible sincronizar para esta condición k .

Para las condiciones de conexión $k = 2$ y $k = 5$, las redes complejas generadas con el algoritmo propuesto, pasan del estado no sincronizado al estado sincronizado con mayor prontitud ($p = 0.011$ y $p = 0.0055$, respectivamente) que aquellas generadas con el algoritmo Newman–Watts, las cuales requieren alcanzar primero la sincronización aproximada. Es importante hacerle notar al lector, que al igual que en los casos anteriores, a mayor condición de conexión k , menor será la probabilidad de transición del estado no sincronizado al estado sincronizado. En cuanto al algoritmo Watts–Strogatz, para $N = 400$ y $k = 5$, se requiere que $p = 0.2$ para alcanzar la sincronización idéntica. Las últimas dos filas de la Tabla 4.2 proporcionan el número de conexiones, recableadas y/o agregadas, por cada uno de los algoritmos para la probabilidad en la que se alcanza la sincronización idéntica.

Es de suma importancia notar de estos valores, la diferencia existente entre los algoritmos de Newman–Watts y el propuesto. Se puede ver que una pequeña diferencia en la probabilidad de transición, se traduce en un número significativo de enlaces que no es necesario agregar y/o recablear. Los eventos que más se resaltan son: $N = 100$ con $k = 2$ (Caso 1a – Tabla 4.1) una diferencia de 43 enlaces no agregados. $N = 400$ con $k = 1, 2$ (Caso 1b – Tabla 4.2) una diferencia de 397 y 158 enlaces no agregados, respectivamente. Con esto podemos concluir que el modelo de red compleja, generado con el algoritmo propuesto, presenta menor dificultad para sincronizar, siendo necesaria una menor cantidad de enlaces agregados y recableados.

Por otra parte, los resultados sugieren que la efectividad del algoritmo propuesto se acentúa para redes complejas que se encuentran escasamente conectadas.

Por último, se proporciona la siguiente evidencia de sincronización, obtenida de las simulaciones numéricas resumidas en las Tablas 4.1–4.2, correspondiente a una red compleja de mundo pequeño con $[N, k, p] = [400, 2, 0.1]$, generada con el algoritmo propuesto. La Fig. 4.1 (a) muestra el error de sincronización existente entre 5 pares de osciladores caóticos, elegidos aleatoriamente, para confirmar sincronía en el estado $y(t)$ a través de e_{2j} , donde $1 \leq j \leq 5$ representa las combinaciones $y_{78}(t) - y_{84}(t)$, $y_{91}(t) - y_{121}(t)$, $y_{69}(t) - y_{189}(t)$, $y_{92}(t) - y_{93}(t)$ y $y_{175}(t) - y_{338}(t)$. La Fig. 4.1 (b) despliega el plano de fase de 4 osciladores caóticos elegidos aleatoriamente, donde se confirma sincronía en el estado $z(t)$, además del atractor caótico generado por la dinámica final de la red compleja.

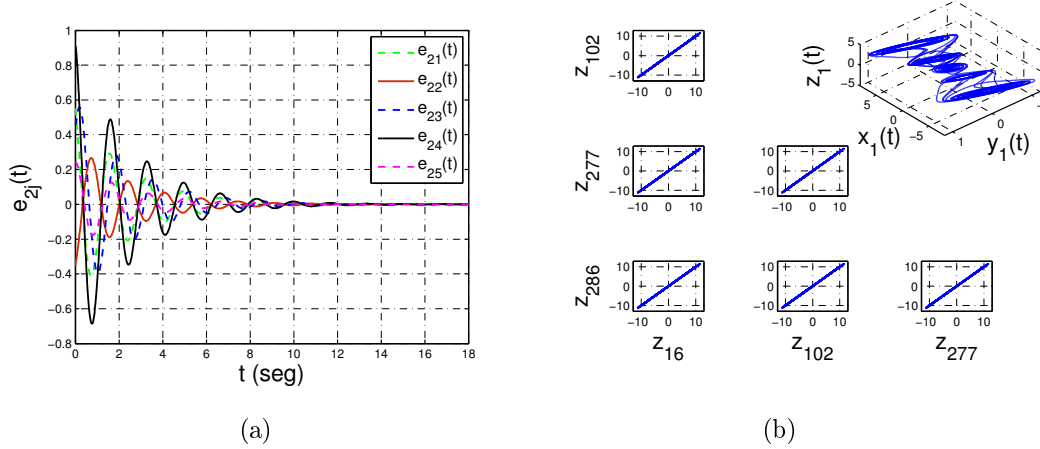


Fig. 4.1: **(a)** Error dinámico de sincronización e_{2j} obtenido del conjunto de ecuaciones (4.14), donde $1 \leq j \leq 5$ representa las combinaciones $y_{78}(t) - y_{84}(t)$, $y_{91}(t) - y_{121}(t)$, $y_{69}(t) - y_{189}(t)$, $y_{92}(t) - y_{93}(t)$ y $y_{175}(t) - y_{338}(t)$. **(b)** Comparación entre las variables $z(t)$ de cuatro osciladores caóticos elegidos aleatoriamente y atractor caótico de 5 enrollamientos.

Finalmente, en la Fig. 4.2 se verifica visualmente la sincronización en el estado $x(t)$ examinando su evolución en el tiempo. De esta última figura, se destaca un fenómeno que llama la atención, ya que todas las trayectorias de la red compleja, convergen a una vecindad del origen, del orden de 1×10^{-3} , para alcanzar el régimen de sincronía y parten de esa zona idénticamente sincronizadas. El fenómeno se presentó en las simulaciones que usaron el oscilador caótico Chua generalizado.

A continuación, damos paso a la presentación de los resultados de sincronización

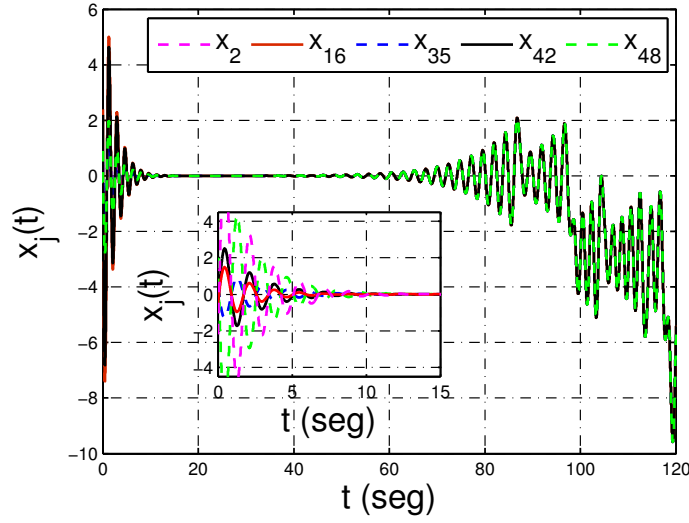


Fig. 4.2: Evolución temporal del estado $x_j(t)$, donde $j = 2, 16, 35, 42, 48$ fueron elegidos aleatoriamente para confirmar sincronización.

usando el oscilador caótico Genesio–Tesi 3D.

4.2.2 Caso 2: sincronización usando Genesio–Tesi 3D

En la presente sección se proporcionan los resultados de la sincronización de $N_{1,2} = 300, 500$ osciladores caóticos Genesio–Tesi 3D, los cuales generan múltiples enrollamientos a lo largo de sus tres variables de estado. De acuerdo con la ecuación (4.3), cada uno de los osciladores caóticos que conforman la red compleja está descrito por

$$\begin{cases} \dot{x}_i = y_i - f_1(y_i) + c \sum_{j=1}^N \mu_{ij} x_i, \\ \dot{y}_i = z_i - f_2(z_i), \\ \dot{z}_i = -ax_i - ay_i - az_i + af_3(x_i), \end{cases} \quad (4.33)$$

donde

$$f_1(y_i) = \sum_{n=1}^{M_y} g_{\frac{(-2n+1)}{2}}(y_i) + \sum_{n=1}^{N_y} g_{\frac{(2n-1)}{2}}(y_i), \quad (4.34)$$

$$f_2(z_i) = \sum_{n=1}^{M_z} g_{\frac{(-2n+1)}{2}}(z_i) + \sum_{n=1}^{N_z} g_{\frac{(2n-1)}{2}}(z_i), \quad (4.35)$$

$$f_3(x_i) = \sum_{l=1}^{m-1} \gamma g_{n_l}(x_i), \quad (4.36)$$

para $1 \leq i \leq N$ y $n_l = \rho + 0.5 + (l-1)(\rho + \varsigma + 1)$, $\gamma = \rho + \varsigma + 1$, $\rho = \lfloor \min_{i,j} \{u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z}\} \rfloor$, $\varsigma = \lfloor \max_{i,j} \{u_i^{eq,y} + u_j^{eq,z}\} \rfloor$. Para cada no linealidad $f_1(\bullet)$, se usa la función núcleo dada por la ecuación (2.4).

Las condiciones iniciales para cada oscilador caótico son generadas, aleatoriamente y sin repetición, dentro del rango $[-10, 10]$. Los osciladores caóticos son acoplados a través de su primer variable de estado, es decir, $\Gamma = \text{diag}(1, 0, 0)$. Para obtener la fuerza de acoplamiento c , que es el parámetro faltante, se analizará la estabilidad del error de sincronización entre pares de osciladores caóticos, que a su vez será la garantía de que la red alcanza la sincronía.

4.2.2.1 Cálculo de la fuerza de acoplamiento para el oscilador de Genesio–Tesi 3D

A continuación, se presenta el procedimiento para obtener la fuerza de acoplamiento c , correspondiente al oscilador caótico generador de múltiples enrollamientos Genesio–Tesi 3D, el cual está descrito en el Capítulo 2 por las ecuaciones (2.3)-(2.5). Este método fue propuesto en [102] y está basado en la teoría de estabilidad de Lyapunov. En general, se determina que la estabilidad del sistema del error de sincronización depende de la fuerza de acoplamiento c , de la cual es posible determinar un rango que garantiza que las trayectorias del sistema convergen al equilibrio, lo que implica que las variables de los osciladores caóticos involucrados alcanzan la sincronía.

Considere cualquier par de osciladores caóticos de la red compleja (4.33) que se encuentren acoplados. Definiendo el error de sincronización entre sus variables de estado como

$$\begin{cases} e_1 &= x_1 - x_2, \\ e_2 &= y_1 - y_2, \\ e_3 &= z_1 - z_2, \end{cases} \quad (4.37)$$

obtenemos que el sistema dinámico del error de sincronización está dado por

$$\begin{cases} \dot{e}_1 &= -2ce_1 + e_2 - (f_1(y_1) - f_1(y_2)), \\ \dot{e}_2 &= e_3 - (f_2(z_1) - f_2(z_2)), \\ \dot{e}_3 &= -a(e_1 + e_2 + e_3) + a(f_3(x_1) - f_3(x_2)). \end{cases} \quad (4.38)$$

El punto de equilibrio del sistema (4.38) se obtiene estableciendo $\dot{e}_1 = \dot{e}_2 = \dot{e}_3 = 0$ y considerando que la convergencia al equilibrio del error, implica que las

variables de estado de los osciladores caóticos involucrados tienden a la sincronía, es decir, se cumple la ecuación siguiente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|[x_1 \ y_1 \ z_1]^T - [x_2 \ y_2 \ z_2]^T\| = 0, \quad (4.39)$$

por lo tanto, las no linealidades $f_1(y)$, $f_2(z)$ y $f_3(x)$ tienen el mismo valor y su diferencia es cero, entonces

$$\begin{cases} 0 &= -2ce_1 + e_2, \\ 0 &= e_3, \\ 0 &= -a(e_1 + e_2 + e_3), \end{cases} \quad (4.40)$$

de donde se deduce que el origen es el punto de equilibrio. Para estudiar la estabilidad del punto de equilibrio, se propone la siguiente matriz simétrica

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

cuyos menores principales están dados por b , b^2 , $b(b^2 - 2)$, donde P es definida positiva para $b > \sqrt{2}$. La función candidata de Lyapunov $V(e) = \mathbf{e}^T \mathbf{P} \mathbf{e}$ correspondiente es

$$V(e) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b & 0 & 1 \\ 0 & b & 1 \\ 1 & 1 & b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} (be_1^2 + 2e_1e_3 + be_2^2 + 2e_2e_3 + be_3^2). \quad (4.42)$$

La forma matricial de la derivada de $V(e)$ evaluada en las trayectorias del sistema, es decir $\dot{V}(e) = -\mathbf{e}^T \mathbf{Q} \mathbf{e}$, nos permite demostrar que $\dot{V}(e)$ es definida negativa si mostramos la positividad de \mathbf{Q} , donde

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} (2bc + a) & -\frac{1}{2}(b - 2a) & \frac{1}{2}(a + ba + 2c) \\ -\frac{1}{2}(b - 2a) & a & -\frac{1}{2}(1 + b - a - ba) \\ \frac{1}{2}(a + ba + 2c) & -\frac{1}{2}(1 + b - a - ba) & (ba - 1) \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

El primero y el segundo menor principal de \mathbf{Q} están dados por $|M_1| = 2bc + a$ y $|M_2| = a(2bc + a) - \frac{1}{4}(b - 2a)^2$ respectivamente, donde puede verse claramente que $|M_1| > 0$ y $|M_2| > 0$ para $c > 0$. El tercer menor principal es el determinante de \mathbf{Q} que está en función del parámetro del sistema a , el parámetro libre $b > \sqrt{2}$ y la

fuerza de acoplamiento c , el cual se muestra a continuación

$$\begin{aligned}
 |M_3| = & -ac^2 + \frac{1}{4}(4a^2b^2 - 2a^2b^3 - 2a^2b + 4ab^3 + 6ab^2 \\
 & - 10ab - 4a - 2b^2 - 2b^3)c + \frac{1}{4}(2a^2b^2 - a^2b^3 \\
 & - a^2b + ab^2 + b^2 - 5ab - a).
 \end{aligned} \tag{4.44}$$

Sustituyendo el parámetro del sistema $a = 0.8$ en la ecuación (4.44), obtenemos

$$\begin{aligned}
 |M_3| = & -\left(\frac{4}{5}\right)c^2 - \left(\frac{1}{50}b^3 - \frac{67}{50}b^2 + \frac{58}{25}b + \frac{4}{5}\right)c \\
 & - \left(\frac{4}{25}b^3 - \frac{77}{100}b^2 + \frac{29}{25}b + \frac{1}{5}\right),
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

que depende del parámetro $b > \sqrt{2}$ de la función de Lyapunov y la fuerza de acoplamiento c . En la Fig. 4.3 se muestra el rango permitido de la fuerza de acoplamiento que garantiza que $|M_3| > 0$, por lo tanto $Q > 0$ y $\dot{V}(e) < 0$, lo que implica que el sistema dinámico del error de sincronización (4.38), converge al punto de equilibrio que es el origen y las variables de los osciladores caóticos involucrados alcanzan la sincronía, cumpliendo la ecuación (4.39).

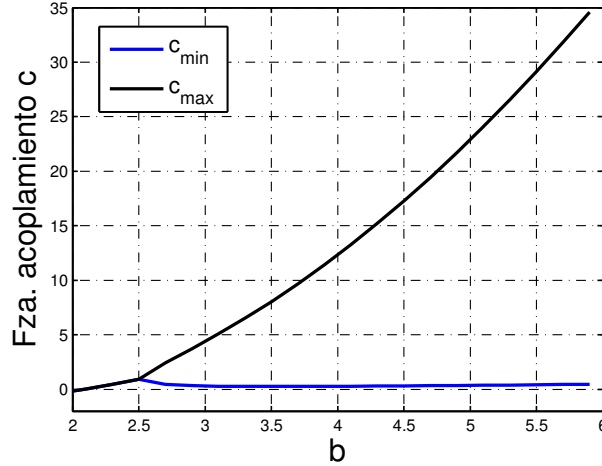


Fig. 4.3: Rango de la fuerza de acoplamiento c que garantiza que el sistema dinámico del error de sincronización (4.38) converge al equilibrio.

Caso 2: sincronización usando Genesio–Tesi 3D (continuación)

Una vez descrito el procedimiento que se empleó para obtener la fuerza de acoplamiento c , se presentan en seguida los resultados de la sincronización de la red compleja de mundo pequeño, la cual está descrita por las ecuaciones (4.33). La matriz

de acoplamiento se genera como se explicó en la Sección 4.1.1, para una topología de vecino más cercano con $N_1 = 300$ (caso 2a), $N_2 = 500$ (caso 2b) y las condiciones de conexión periódica $k = 1, 2, 5$ para cada caso, a las cuales se les aplican por separado los algoritmos de mundo pequeño descritos en el Capítulo 3. En la Tabla 4.3 se proporcionan los resultados de la sincronización, donde la red compleja de mundo pequeño está compuesta por $N_1 = 300$ osciladores caóticos Genesio–Tesi 3D (caso 2a). Ahora puede llevarse a cabo una comparación que determine el algoritmo que produce el modelo de red compleja que resulta más sencillo sincronizar.

Cuando la condición de conexión $k = 1$ podemos ver que el algoritmo propuesto propicia la sincronía en la red compleja para probabilidades muy bajas, siendo la primera de ellas $p = 0.002$, que corresponde a recablear 1 y agregar 89 conexiones. Más importante aún es la probabilidad para la que se alcanza sincronización idéntica (SI en azul), que corresponde al valor de probabilidad para el cual el algoritmo de Newman–Watts solo es capaz de propiciar sincronización aproximada.

Para $k = 2$, como era de esperarse al aumentar el número de conexiones existentes en la red compleja, es posible disminuir el valor de probabilidad mínimo requerido para alcanzar sincronización idéntica, el cual ha pasado de $p = 0.01$ para $k = 1$ a $p = 0.003$ para $k = 2$. Para esta condición de conexión debe notarse que el algoritmo propuesto no produce sincronización aproximada, pasando del estado no sincronizado al estado sincronizado. Por otra parte, usando el algoritmo Watts–Strogatz no fue posible propiciar la sincronía para las condiciones de $N = 300$ con $k = 1, 2$.

Cuando la condición de conexión $k = 5$, es posible sincronizar los modelos de red compleja resultantes de aplicar los tres algoritmos, sin embargo, el algoritmo que se propuso sigue teniendo ventaja sobre los algoritmos de Newman–Watts y Watts–Strogatz. De igual manera que para $k = 1$, el algoritmo propuesto alcanza la sincronía idéntica pasando previamente por sincronía aproximada, mientras que el algoritmo Watts–Strogatz requiere que la probabilidad alcance $p = 0.05$ para alcanzar la sincronización idéntica. En lo que corresponde a la red compleja generada por el algoritmo de Newman–Watts, para $0.001 \leq p < 0.005$ solo es posible alcanzar sincronización aproximada en el estado $x(t)$, mientras que $y(t)$ y $z(t)$ no sincronizan, por lo que además existe la sincronización parcial cuando se emplea el oscilador caótico de múltiples enrollamientos Genesio–Tesi 3D. Posterior a esos valores de probabilidad, la red compleja puede alcanzar la sincronización idéntica.

Resultados de sincronización									
N	300 (Caso 2a)								
k	1			2			5		
\mathcal{A}_{mp}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}
0.000	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0.001	NS	NS	NS	NS	NS	NS	SA	SP	NS
0.002	SA	NS	NS	NS	NS	NS	SA	SP	SA
0.003	SA	NS	NS	SI	SA	NS	SA	SP	SA
0.004	SA	NS	NS	SI	SA	NS	SI	SP	SA
0.005	SA	NS	NS	SI	SA	NS	SI	SI	SA
0.006	SA	NS	NS	SI	SA	NS	SI	SI	SA
0.007	SA	NS	NS	SI	SA	NS	SI	SI	SA
0.008	SA	NS	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.009	SA	NS	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.010	SI	SA	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.015	SI	SA	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.020	SI	SA	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.025	SI	SA	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.030	SI	SA	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.050	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
0.100	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
0.500	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
\vdots	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
1.0	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
Recableadas	3	–	0	2	–	0	6	–	75
Agregadas	446	2228	–	133	354	–	173	217	–

Tabla 4.3: Resultados de sincronización para una red compleja de $N = 300$ con $k = 1, 2, 5$ y el número de conexiones recableadas y/o agregadas para alcanzar sincronización idéntica (SI en azul).

Las últimas dos filas de la Tabla 4.3 proporcionan el número de conexiones, agregadas y/o recableadas, necesarias para que las redes complejas logren la sincronización idéntica (SI en azul), donde puede verse que introducir la propiedad de mundo pequeño de la manera propuesta, afecta en la proporción que debe modificarse la red compleja para llevar a cabo determinado proceso. Para este caso en particular, fue posible alcanzar la sincronización idéntica recableando y agregando un número menor de conexiones que con los otros algoritmos descritos.

Para el caso donde $N = 500$ y la condición de conexión $k = 1, 2, 5$, los resultados son muy similares y se presentan en la Tabla 4.4, variando únicamente los valores de la probabilidad en donde ocurre la transición, ya sea del estado no sincronizado al estado con sincronización aproximada, o del estado con sincronización aproximada al estado sincronizado (sincronización idéntica). Los detalles significativos son los siguientes: en primer lugar, el algoritmo propuesto presenta valores de probabilidad de transición, principalmente al estado con sincronización idéntica, más cercanos a cero a mayor tamaño de la red compleja N , lo que sugiere mayor efectividad en redes grandes con condiciones de conexión k pequeñas.

En segundo lugar, el fenómeno de la sincronización parcial y aproximada, generado por el algoritmo de Newman–Watts, se presentó para una condición de conexión k menor que en el Caso 2a y para probabilidades mayores, lo que sugiere dificultad para propiciar la sincronización idéntica cuando la red compleja es grande y se encuentra escasamente conectada.

Por último, el algoritmo Watts–Strogatz presentó serias dificultades para facilitar el fenómeno de sincronía cuando la condición de conexión k es pequeña, siendo imposible sincronizar la red compleja de mundo pequeño generada para $k = 1, 2$. Para el caso donde $k = 5$, es posible alcanzar la sincronía en la red, sin embargo hay que notar que el valor de transición de la probabilidad es mayor al Caso 2a, lo que sugiere limitaciones en el algoritmo para propiciar la sincronización a mayor tamaño de la red compleja.

Las últimas filas de la Tabla 4.4 proporcionan el número de conexiones, recableadas y/o agregadas, necesarias para alcanzar la sincronización idéntica en las redes complejas generadas por cada uno de los algoritmos. Claramente puede verse que este número se reduce al usar el procedimiento propuesto para los casos mostrados. Los eventos más destacados son: para $N = 300$ con $k = 1, 2$ el algoritmo

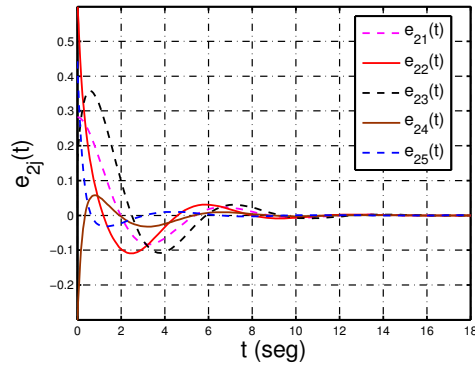
Resultados de sincronización									
N	500 (Caso 2b)								
k	1			2			5		
\mathcal{A}_{mp}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}	\mathcal{A}_p	\mathcal{A}_{NW}	\mathcal{A}_{WS}
0.000	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS	NS
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
0.001	NS	NS	NS	SA	NS	NS	SI	NS	NS
0.002	SA	NS	NS	SA	SA	NS	SI	SA	NS
0.003	SA	SP	NS	SA	SA	NS	SI	SA	NS
0.004	SI	SP	NS	SA	SA	NS	SI	SI	NS
0.005	SI	SP	NS	SI	SA	NS	SI	SI	NS
0.006	SI	SP	NS	SI	SA	NS	SI	SI	NS
0.007	SI	SP	NS	SI	SA	NS	SI	SI	NS
0.008	SI	SI	NS	SI	SA	NS	SI	SI	NS
0.009	SI	SI	NS	SI	SA	NS	SI	SI	NS
0.010	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.015	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.025	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.030	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.050	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SA
0.070	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
0.100	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
0.500	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
\vdots	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
1.0	SI	SI	NS	SI	SI	NS	SI	SI	SI
Recableadas	2	–	0	5	–	0	3	–	175
Agregadas	497	994	–	619	1238	–	122	489	–

Tabla 4.4: Resultados de sincronización para una red compleja de $N = 500$ con $k = 1, 2, 5$ y el número de conexiones recableadas y/o agregadas para alcanzar sincronización idéntica (SI en azul).

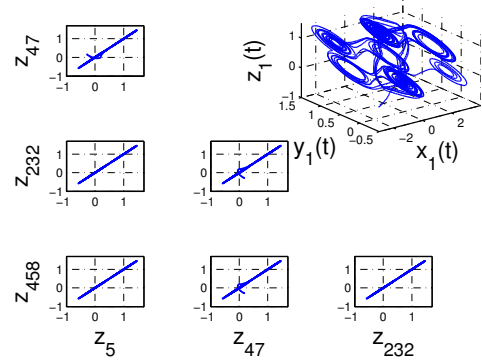
propuesto permite alcanzar la sincronización idéntica, omitiendo el agregado de 1782 y 221 conexiones, respectivamente. Para $N = 500$ y $k = 1, 2, 5$, es posible sincronizar la red compleja de manera idéntica, usando el algoritmo propuesto, omitiendo 497, 619 y 367 enlaces agregados, respectivamente.

Estos resultados nos permiten concluir, que el procedimiento propuesto para introducir la propiedad de mundo pequeño, deriva en un modelo de red compleja que resulta más sencillo sincronizar, modificando la topología en menor medida, agregando menor cantidad de enlaces y recableando apenas una muy pequeña fracción de los mismos.

Por otro lado, como evidencia de sincronía se proporciona lo siguiente: en la Fig. 4.4 (a) se muestra el error dinámico de sincronización e_{2j} producido por el conjunto de ecuaciones (4.38), para algunos pares de osciladores caóticos elegidos aleatoriamente, donde $1 \leq j \leq 5$ representa las siguientes combinaciones $y_{54}(t) - y_{448}(t)$, $y_{50}(t) - y_{92}(t)$, $y_{23}(t) - y_{50}(t)$, $y_{245}(t) - y_{279}(t)$ y $y_{97}(t) - y_{387}(t)$, para confirmar sincronía en el estado $y(t)$ de los osciladores caóticos involucrados. La Fig. 4.4 (b) presenta los planos de fase donde se confirma la sincronización en la variable $z(t)$ de 4 osciladores caóticos, elegidos aleatoriamente. El atractor caótico de $2 \times 2 \times 2$ enrollamientos, generado por la dinámica final de la red compleja es mostrado también en esta figura.



(a)



(b)

Fig. 4.4: **(a)** Error dinámico de sincronización e_{2j} obtenido del conjunto de ecuaciones (4.38), donde $1 \leq j \leq 5$ representa las combinaciones $y_{54}(t) - y_{448}(t)$, $y_{50}(t) - y_{92}(t)$, $y_{23}(t) - y_{50}(t)$, $y_{245}(t) - y_{279}(t)$ y $y_{97}(t) - y_{387}(t)$. **(b)** Comparación entre las variables $z(t)$ de cuatro osciladores caóticos elegidos aleatoriamente y atractor caótico de $2 \times 2 \times 2$ enrollamientos.

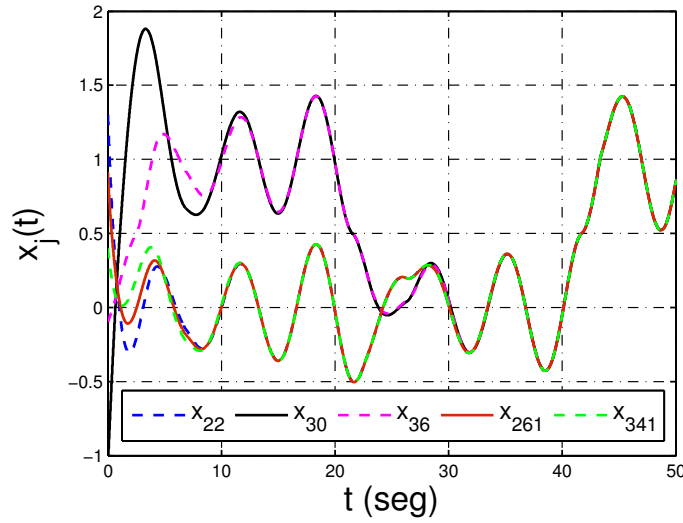


Fig. 4.5: Evolución temporal del estado $x_j(t)$, donde $j = 22, 30, 36, 261, 341$ fueron elegidos aleatoriamente para confirmar sincronización. Se aprecian dos grupos sincronizados, uno formado por los osciladores caóticos 30 y 36 en negro y magenta respectivamente y el grupo formado por los osciladores caóticos 22, 261 y 341 en azul, rojo y verde, respectivamente.

Por último, en la Fig. 4.5 se verifica visualmente la sincronización en el estado $x(t)$ al examinar su evolución temporal. Se resalta la presencia de sincronización por grupos, ya que antes de alcanzarse un estado final de sincronía en la red compleja, grupos de osciladores caóticos presincronizan a otra dinámica, que posteriormente converge junto con las demás a un solo comportamiento sincronizado. El fenómeno se presentó en las simulaciones que usaron el oscilador caótico Genesio–Tesi 3D.

Con estos resultados se da por terminado este capítulo, concluyendo que el algoritmo propuesto, mostró mayor efectividad para propiciar el fenómeno de sincronización en el modelo de red compleja que genera, agregando una menor cantidad de enlaces que su competidor más cercano (algoritmo de Newman–Watts) y recableando apenas una pequeña porción de los enlaces existentes. A continuación, damos paso al último capítulo de este trabajo, donde se proporcionan las conclusiones pertinentes y los trabajos futuros.

Capítulo 5

Conclusiones

Para finalizar el escrito, este capítulo de cierre proporciona las conclusiones pertinentes sobre los resultados mostrados, haciendo énfasis en las ventajas de las aportaciones descritas, pero sin olvidar mencionar sus limitaciones, las cuales crean áreas de oportunidad para continuar en esta línea de investigación, estableciendo así los trabajos futuros, los cuales también son sugeridos aquí.

Por una parte, en lo que se refiere al algoritmo propuesto, podemos concluir lo siguiente:

Como primer punto a resaltar está la propuesta de un algoritmo para introducir la propiedad de mundo pequeño a una red compleja. Esta metodología mostró efectividad para reducir la longitud promedio del camino más corto $L(N, k, p)$ entre pares de osciladores caóticos, así como para amortiguar la pérdida de coeficiente de agrupamiento $C(N, k, p)$, producida al introducir aleatoriedad en la topología, ya sea recableando (Algoritmo Watt–Strogatz) o agregando (algoritmo Newman–Watts) enlaces.

El procedimiento propuesto es eficiente para reducir $L(N, k, p)$ y atenuar la pérdida de $C(N, k, p)$ en función, ya sea del tamaño de la red N o la condición de conexión k (Fig. 3.14–3.15). Se mostró que el algoritmo propuesto, introduce exitosamente la propiedad de mundo pequeño a una red compleja, generando características de $L(N, k, p)$ y $C(N, k, p)$ muy similares a las del algoritmo Newman–Watts, pero con clara ventaja para propiciar el fenómeno de sincronización.

Por otro lado, en lo referente a la sincronización, es importante mencionar dos fenómenos que llaman la atención. El primero de ellos es que cuando la red compleja está formada por los osciladores caóticos Chua generalizado, todas las dinámicas convergen a valores muy cercanos del origen, algunas veces del orden de 1×10^{-3}

antes de sincronizar y surgen de esa zona sincronizados.

El segundo fenómeno de interés es la presencia de dos tipos de sincronía descritos en este trabajo, siendo estas sincronía aproximada e idéntica. Se remarca el hecho de que la sincronización aproximada, cuando existe en la red compleja de mundo pequeño, se presenta siempre antes de la sincronización idéntica y para lograrla, es necesario alcanzar un valor mínimo de p , como se mostró en las Tablas 4.1–4.4. Esto sugiere que se cumple lo que se planteó al inicio de esta investigación, referente a que es posible propiciar el fenómeno de sincronización a través de la manipulación de la topología de la red compleja, lo que sin duda llevaría a una reducción de la fuerza de acoplamiento c .

Es precisamente el valor de la fuerza de acoplamiento c el siguiente punto a mencionar. Habiendo mostrado matemáticamente, a través de los análisis descritos en la Sección 4.2.1.1 y 4.2.2.1, la existencia de valores pequeños de c que garantizan la convergencia al equilibrio del sistema dinámico del error de sincronización. Las simulaciones numéricas nos permitieron comprobar, que los valores obtenidos son igualmente efectivos para llevar una red compleja de mundo pequeño, formada por osciladores caóticos de múltiples enrollamientos, al régimen de sincronía una vez que ha sido alcanzado un valor mínimo de p .

Por otro lado, se hace notar que al emplear una fuerza de acoplamiento pequeña, se genera una ley de control que resulta menos invasiva para el sistema completo, lo que sin duda es una de las ventajas principales de emplear la metodología propuesta para obtenerla. Además, esto corresponde con el sentido de sincronía que originalmente propuso C. Huygens, donde se busca que el fenómeno ocurra en presencia de un acoplamiento casi imperceptible, como describió en su experimento.

Es importante hacer notar el efecto del algoritmo propuesto en el proceso de sincronizar una red compleja de mundo pequeño. Como se mostró y explicó en la Sección 4.2 con las Tablas 4.1–4.4, existe un mínimo de probabilidad p , necesario para que exista la posibilidad de que la red compleja sincronice. Este valor mínimo de p suele presentarse más cercano a cero cuando se emplea el algoritmo de mundo pequeño propuesto, siendo su competidor más fuerte el algoritmo de Newman–Watts. Esta ventaja es importante considerando que ambos algoritmos, el propuesto y Newman–Watts, agregan la misma cantidad de enlaces para una probabilidad p dada.

Otro fenómeno que debe ser mencionado, para propósitos comparativos

relacionados con la eficiencia de los algoritmos para propiciar la sincronía, es que el modelo de red compleja generado con la metodología de Newman–Watts presenta deficiencia para mantener la sincronización por intervalos de tiempo, un hecho que seguramente está relacionado con la pérdida de coeficiente de agrupamiento $C(N, k, p)$ para probabilidades bajas y que no sucede para el algoritmo propuesto.

La ventaja más destacable de usar el procedimiento propuesto, para introducir la propiedad de mundo pequeño en una red compleja, es sin duda la existencia de una probabilidad de transición menor que la necesaria cuando se utiliza el algoritmo de Newman–Watts, lo que se traduce en una buena cantidad de enlaces que no es necesario agregar o recablear.

Por otro lado, el algoritmo Watts–Strogatz queda rezagado considerablemente, ya que como se mostró en las Tablas 4.1–4.4, para varios valores de N y k no es posible sincronizar la red compleja de mundo pequeño que genera, siendo necesaria la existencia de un número mayor de conexiones, es decir, una condición de conexión k mayor. Por lo tanto, se concluye que el modelo generado por el algoritmo Watts–Strogatz, resulta difícil de sincronizar cuando la red está escasamente conectada, es decir, cuando se inicia con una condición de conexión k pequeña.

5.1 Trabajos futuros

Concluiremos este escrito enlistando las áreas de oportunidad que pueden atenderse para complementar este trabajo.

- Investigar la robustez del modelo de red compleja, generado por los tres algoritmos de mundo pequeño, para propósitos comparativos.
- Determinar si los resultados aquí presentados se cumplen para redes complejas de mundo pequeño formadas por osciladores caóticos no idénticos.
- Implementar el algoritmo propuesto para describir y modelar el comportamiento de sistemas de naturaleza biológica o social, por ejemplo.
- Investigar la eficiencia del algoritmo propuesto en las estrategias de inmunización empleadas en las emergencias epidemiológicas, ya que debido al patrón que se sugiere, es posible que se pueda contener, aislar o atacar una zona específica de la red compleja y su vecindad.

- Implementar esta nueva estrategia en trabajos en los que la topología de mundo pequeño ha mostrado mejorar el desempeño o la capacidad que tienen los sistemas para almacenar o procesar información, como redes neuronales o memorias asociativas de Hopfield, así como su capacidad para acelerar la transmisión de la misma.

5.2 Producción científica

- Artículos
 - **Performance improvement of chaotic encryption via energy and frequency location criteria (2015)**
A.G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M.A. Platas-Garza, D.A. Diaz-Romero
 Mathematics and Computers in Simulation, 112, 14–27.
 - **Synchronization of Generalized Chua’s Chaotic Oscillators in Small-world Topology (2015)**
A.G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M.A. Platas-Garza
 Journal of Engineering Science and Technology Review, 8(2), 185-191.
 Special Issue on Synchronization and Control of Chaos: Theory, Methods and Applications.
 - **Energy and Frequency Location as Criteria for Chaotic Encryption on Unidimensional Signals (2015)**
A.G. Soriano-Sánchez, M.A. Platas-Garza, D.A. Diaz-Romero, C. Posadas-Castillo
 Chaotic Modeling and Simulation, 1, 41–49.
 - **Coupling strength computation for chaotic synchronization of complex networks with multi-scroll attractors (2016)**
A.G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M.A. Platas-Garza, C. Cruz-Hernández, R.M. López-Gutiérrez
 Applied Mathematics and Computation, 275, 305–316.
 - **Smart pattern to generate small-world networks (sometido 2016)**
A.G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo
 Physical Review E.

- Capítulo
 - **Chaotic Synchronization of CNNs in Small-World Topology Applied to Data Encryption (2016)**
A.G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M.A. Platas-Garza, C. Elizondo-González
 In Advances and Applications in Chaotic Systems (pp. 337–362). Springer International Publishing.
- Congresos
 - **Synchronization of Chaotic Cellular Neural Networks in Small-World Topology**
A.G. Soriano-Sánchez, M.A. Platas-Garza, R.M. López-Gutiérrez, C. Cruz-Hernández, C. Posadas-Castillo
 The 8th Chaotic Modeling and Simulation International Conference
 26–29 May, 2015, Paris, France.
 - **Synchronization of Small-World Networks with Multi-Scroll Chaotic Oscillators**
A.G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M.A. Platas-Garza, C. Cruz-Hernández, A.E. Loya-Cabrera
 The 9th Chaotic Modeling and Simulation International Conference
 23–26 May 2016 London, UK.

Bibliografía

- [1] C. Cruz-Hernández, R. M. López-Gutiérrez, A. Y. Aguilar-Bustos, and C. Posadas-Castillo, “Communicating encrypted information based on synchronized hyperchaotic maps,” *Int. J. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, vol. 11, no. 5, pp. 337–349, 2010.
- [2] A. G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M. A. Platas-Garza, and D. Diaz-Romero, “Performance improvement of chaotic encryption via energy and frequency location criteria,” *Math. Comput. Simul.*, vol. 112, pp. 14–27, 2015.
- [3] R. M. López-Gutiérrez, C. Posadas-Castillo, D. López-Mancilla, and C. Cruz-Hernández, “Communicating via robust synchronization of chaotic lasers,” *Chaos, Solitons Fract.*, vol. 42, no. 1, pp. 277–285, 2009.
- [4] G. Zheng, D. Boutat, T. Floquet, and J. P. Barbot, “Secure communication based on multi-input multi-output chaotic system with large message amplitude,” *Chaos, Solitons Fract.*, vol. 41, no. 3, pp. 1510–1517, 2009.
- [5] A. G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M. A. Platas-Garza, and C. Elizondo-González, “Chaotic synchronization of cnns in small-world topology applied to data encryption,” in *Advances and Applications in Chaotic Systems*, pp. 337–362, Springer, 2016.
- [6] Z. Li, Z. Duan, G. Chen, and L. Huang, “Consensus of multiagent systems and synchronization of complex networks: A unified viewpoint,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Regul. Pap.*, vol. 57, no. 1, pp. 213–224, 2010.
- [7] W. Ni and D. Cheng, “Leader-following consensus of multi-agent systems under fixed and switching topologies,” *Syst. Control Lett.*, vol. 59, no. 3–4, pp. 209–217, 2010.

- [8] S. Li, H. Du, and X. Lin, “Finite-time consensus algorithm for multi-agent systems with double-integrator dynamics,” *Automatica*, vol. 47, no. 8, pp. 1706–1712, 2011.
- [9] C. Li, L. Chen, and K. Aihara, “Synchronization of coupled nonidentical genetic oscillators,” *Phys. Biol.*, vol. 3, no. 1, p. 37, 2006.
- [10] R. Bonneau, “Learning biological networks: from modules to dynamics,” *Nat. Chem. Biol.*, vol. 4, no. 11, pp. 658–664, 2008.
- [11] T. Danino, O. Mondragón-Palomino, L. Tsimring, and J. Hasty, “A synchronized quorum of genetic clocks,” *nature*, vol. 463, no. 7279, pp. 326–330, 2010.
- [12] D. J. Watts and S. H. Strogatz, “Collective dynamics of small-world networks,” *nature*, vol. 393, no. 6684, pp. 440–442, 1998.
- [13] M. E. J. Newman and D. J. Watts, “Renormalization group analysis of the small-world network model,” *Phys. Lett. A*, vol. 263, no. 4, pp. 341–346, 1999.
- [14] M. E. J. Newman and D. J. Watts, “Scaling and percolation in the small-world network model,” *Phys. Rev. E*, vol. 60, no. 6, pp. 7332–7342, 1999.
- [15] E. de Echegaray *et al.*, *Diccionario general etimológico de la lengua española*, vol. 2. los hijos de R. Álvarez, 1898.
- [16] E. N. Lorenz, “Deterministic nonperiodic flow,” *J. Atmos. Sci.*, vol. 20, no. 2, pp. 130–141, 1963.
- [17] B. R. Hunt and E. Ott, “Defining chaos,” *Chaos*, vol. 25, no. 9, p. 097618, 2015.
- [18] R. L. Devaney, *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, vol. 2. Addison-Wesley, 1989.
- [19] R. L. Devaney, *A First Course in Chaotic Dynamical Systems: Theory and Experiment*. Addison-Wesley, 1992.
- [20] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey, “On devaney’s definition of chaos,” *Am. Math. Mon.*, vol. 99, no. 4, pp. 332–334, 1992.

- [21] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli, and J.-M. Strelcyn, “Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems; a method for computing all of them. part 1: Theory,” *Meccanica*, vol. 15, no. 1, pp. 9–20, 1980.
- [22] P. Grassberger and I. Procaccia, “Measuring the strangeness of strange attractors,” in *The Theory of Chaotic Attractors*, pp. 170–189, Springer, 2004.
- [23] P. Grassberger and I. Procaccia, “Characterization of strange attractors,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 50, no. 5, p. 346, 1983.
- [24] H. G. E. Hentschel and I. Procaccia, “The infinite number of generalized dimensions of fractals and strange attractors,” *Phys. D: Nonlinear phenom.*, vol. 8, no. 3, pp. 435–444, 1983.
- [25] T. Matsumoto, L. O. Chua, and M. Komuro, “The double scroll,” *IEEE Trans. Circuits Syst.*, vol. 32, no. 8, pp. 797–818, 1985.
- [26] L. Euler, “Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis,” *Comment. Acad. Sci. U. Petrop.*, vol. 8, pp. 128–140, 1741.
- [27] N. Deo, ed., *Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science*. PHI Learning Pvt. Ltd., 2004.
- [28] S. Boccaletti, V. Latora, Y. Moreno, M. Chavez, and D.-U. Hwang, “Complex networks: Structure and dynamics,” *Phys. Rep.*, vol. 424, no. 4, pp. 175–308, 2006.
- [29] A.-L. Barabasi and Z. N. Oltvai, “Network biology: understanding the cell’s functional organization,” *Nat. Rev. Genet.*, vol. 5, no. 2, pp. 101–113, 2004.
- [30] T. Yamada and P. Bork, “Evolution of biomolecular networks? lessons from metabolic and protein interactions,” *Nat. Rev. Mol. Cell Biol.*, vol. 10, no. 11, pp. 791–803, 2009.
- [31] T. Miyashita, S. Kubik, G. Lewandowski, and J. F. Guzowski, “Networks of neurons, networks of genes: an integrated view of memory consolidation,” *Neurobiol. Learn. Mem.*, vol. 89, no. 3, pp. 269–284, 2008.

- [32] S. N. Dorogovtsev and J. F. F. Mendes, *Evolution of networks: From biological nets to the Internet and WWW*. Oxford University Press, 2013.
- [33] J. H. Fowler, N. A. Christakis, *et al.*, “Dynamic spread of happiness in a large social network: longitudinal analysis over 20 years in the framingham heart study,” *Br. Med. J.*, vol. 337, p. a2338, 2008.
- [34] H. Kwak, C. Lee, H. Park, and S. Moon, “What is twitter, a social network or a news media?,” in *Proceedings of the 19th international conference on World wide web*, pp. 591–600, ACM, 2010.
- [35] M. O. Jackson and A. Watts, “The evolution of social and economic networks,” *J. Econ. Theory*, vol. 106, no. 2, pp. 265–295, 2002.
- [36] F. Schweitzer, G. Fagiolo, D. Sornette, F. Vega-Redondo, A. Vespignani, and D. R. White, “Economic networks: The new challenges,” *Science*, vol. 325, no. 5939, p. 422, 2009.
- [37] M. E. J. Newman, “The structure and function of complex networks,” *SIAM review*, vol. 45, no. 2, pp. 167–256, 2003.
- [38] V. Manca and L. Bianco, “Biological networks in metabolic p systems,” *Biosyst.*, vol. 91, no. 3, pp. 489–498, 2008.
- [39] J. D. Orth, I. Thiele, and B. Ø. Palsson, “What is flux balance analysis?,” *Nat. Biotechnol.*, vol. 28, no. 3, pp. 245–248, 2010.
- [40] J.-P. Onnela, J. Saramäki, J. Hyvönen, G. Szabó, D. Lazer, K. Kaski, J. Kertész, and A.-L. Barabási, “Structure and tie strengths in mobile communication networks,” *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 104, no. 18, pp. 7332–7336, 2007.
- [41] X. F. Wang, “Complex networks: Topology, dynamics and synchronization,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 12, no. 5, pp. 885–916, 2002.
- [42] F. Comellas, J. Ozon, and J. G. Peters, “Deterministic small-world communication networks,” *Inf. Process. Lett.*, vol. 76, no. 1, pp. 83–90, 2000.
- [43] P. Erdős and A. Rényi, “On the evolution of random graphs,” *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci.*, vol. 5, pp. 17–61, 1960.

- [44] U. C. OCEANO, “Diccionario enciclopédico,” *Barcelona, España: Océano*, 2002.
- [45] A. Pikovsky, M. Rosenblum, and J. Kurths, *Synchronization: a universal concept in nonlinear sciences*, vol. 12. Cambridge university press, 2003.
- [46] J. Fell and N. Axmacher, “The role of phase synchronization in memory processes,” *Nat. Rev. Process.*, vol. 12, no. 2, pp. 105–118, 2011.
- [47] T. Womelsdorf and P. Fries, “The role of neuronal synchronization in selective attention,” *Curr. Opin. Neurobiol.*, vol. 17, no. 2, pp. 154–160, 2007.
- [48] J. F. Hipp, A. K. Engel, and M. Siegel, “Oscillatory synchronization in large-scale cortical networks predicts perception,” *Neuron*, vol. 69, no. 2, pp. 387–396, 2011.
- [49] P. Chenette and C. Martinez, “Synchronization of women’s cycles: a big data and crowdsourcing approach to menstrual cycle analysis,” *Fertil. Steril.*, vol. 102, no. 3, p. e250, 2014.
- [50] R. Fitzgerald, “Phase synchronization may reveal communication pathways in brain activity,” *Phys. Today*, vol. 52, no. 3, pp. 17–19, 2008.
- [51] K. Yun, K. Watanabe, and S. Shimojo, “Interpersonal body and neural synchronization as a marker of implicit social interaction,” *Sci. Rep.*, vol. 2, 2012.
- [52] L. Conradt and T. J. Roper, “Group decision-making in animals,” *nature*, vol. 421, no. 6919, pp. 155–158, 2003.
- [53] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Synchronization in chaotic systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 64, no. 8, pp. 821–824, 1990.
- [54] C. W. Wu and L. O. Chua, “A unified framework for synchronization and control of dynamical systems,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 4, no. 4, pp. 979–998, 1994.
- [55] J. F. Heagy, T. L. Carroll, and L. M. Pecora, “Desynchronization by periodic orbits,” *Phys. Rev. E*, vol. 52, no. 2, pp. R1253–R1256, 1995.

- [56] N. F. Rulkov, “Images of synchronized chaos: Experiments with circuits,” *Chaos*, vol. 6, no. 3, pp. 262–279, 1996.
- [57] L. M. Pecora, T. L. Carroll, G. A. Johnson, D. J. Mar, and J. F. Heagy, “Fundamentals of synchronization in chaotic systems, concepts, and applications,” *Chaos*, vol. 7, no. 4, pp. 520–543, 1997.
- [58] G. Kolumbán, M. P. Kennedy, and L. O. Chua, “The role of synchronization in digital communication,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundam. Theory Appl.*, vol. 44, no. 10, pp. 927–936, 1997.
- [59] S. Yanchuk, Y. Maistrenko, and E. Mosekilde, “Loss of synchronization in coupled rössler systems,” *Physica D*, vol. 154, no. 1, pp. 26–42, 2001.
- [60] M. Zribi, N. Smaoui, and H. Salim, “Synchronization of the unified chaotic systems using a sliding mode controller,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 42, no. 5, pp. 3197–3209, 2009.
- [61] L. Torres, G. Besançon, D. Georges, and C. Verde, “Exponential nonlinear observer for parametric identification and synchronization of chaotic systems,” *Math. Comput. Simul.*, vol. 82, no. 5, pp. 836–846, 2012.
- [62] H. Nijmeijer and I. M. Mareels, “An observer looks at synchronization,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundam. Theory Appl.*, vol. 44, no. 10, pp. 882–890, 1997.
- [63] X. Wan and J. Sun, “Adaptive–impulsive synchronization of chaotic systems,” *Math. Comput. Simul.*, vol. 81, no. 8, pp. 1609–1617, 2011.
- [64] A. Boukabou and N. Mekircha, “Generalized chaos control and synchronization by nonlinear high–order approach,” *Math. Comput. Simul.*, vol. 82, no. 11, pp. 2268–2281, 2012.
- [65] X. F. Wang and G. Chen, “Synchronization in small–world dynamical networks,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 12, no. 1, pp. 187–192, 2002.
- [66] L. M. Pecora and T. L. Carroll, “Master stability functions for synchronized coupled systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 80, no. 10, p. 2109, 1998.

- [67] I. Belykh, V. Belykh, and M. Hasler, “Generalized connection graph method for synchronization in asymmetrical networks,” *Phys. D: Nonlinear phenom.*, vol. 224, no. 1, pp. 42–51, 2006.
- [68] A. Pogromsky and H. Nijmeijer, “Cooperative oscillatory behavior of mutually coupled dynamical systems,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundam. Theory Appl.*, vol. 48, no. 2, pp. 152–162, 2001.
- [69] S. H. Strogatz, “From kuramoto to crawford: exploring the onset of synchronization in populations of coupled oscillators,” *Phys. D: Nonlinear phenom.*, vol. 143, no. 1, pp. 1–20, 2000.
- [70] F. Dorfler and F. Bullo, “Synchronization and transient stability in power networks and nonuniform kuramoto oscillators,” *SIAM J. Control Optim.*, vol. 50, no. 3, pp. 1616–1642, 2012.
- [71] H. Fotsin and P. Wofo, “Adaptive synchronization of a modified and uncertain chaotic van der pol–duffing oscillator based on parameter identification,” *Chaos, Soliton Fract.*, vol. 24, no. 5, pp. 1363–1371, 2005.
- [72] H. Fotsin, S. Bowong, and J. Daafouz, “Adaptive synchronization of two chaotic systems consisting of modified van der pol–duffing and chua oscillators,” *Chaos, Soliton Fract.*, vol. 26, no. 1, pp. 215–229, 2005.
- [73] G. Chen, J. Zhou, and Z. Liu, “Global synchronization of coupled delayed neural networks and applications to chaotic cnn models,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 14, no. 07, pp. 2229–2240, 2004.
- [74] J. Lü, X. Yu, G. Chen, and D. Cheng, “Characterizing the synchronizability of small–world dynamical networks,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Regul. Pap.*, vol. 51, no. 4, pp. 787–796, 2004.
- [75] M. Barahona and L. M. Pecora, “Synchronization in small–world systems,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 89, no. 5, p. 054101, 2002.
- [76] A. G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, and M. A. Platas-Garza, “Synchronization of generalized chua’s chaotic oscillators in small–world topology,” *J. Eng. Sci. Technol. Rev.*, vol. 8, no. 2, pp. 185–191, 2015.

- [77] I. Belykh, M. Hasler, M. Lauret, and H. Nijmeijer, “Synchronization and graph topology,” *Int. J. Bifurc. Chaos*, vol. 15, no. 11, pp. 3423–3433, 2005.
- [78] J. Lehnert, “Synchronization in complex networks,” in *Controlling Synchronization Patterns in Complex Networks*, pp. 33–41, Springer, 2016.
- [79] C. Posadas-Castillo, C. Cruz-Hernández, and R. López-Gutiérrez, “Experimental realization of synchronization in complex networks with chua’s circuits like nodes,” *Chaos, Solitons Fract.*, vol. 40, no. 4, pp. 1963–1975, 2009.
- [80] C. Posadas-Castillo, C. Cruz-Hernández, and R. López-Gutiérrez, “Synchronization of chaotic neural networks with delay in irregular networks,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 205, no. 1, pp. 487–496, 2008.
- [81] C. Posadas-Castillo, E. Garza-González, D. Diaz-Romero, E. Alcorta-García, and C. Cruz-Hernández, “Synchronization of irregular complex networks with chaotic oscillators: Hamiltonian systems approach,” *J. Appl. Res. Technol.*, vol. 12, no. 4, pp. 782–791, 2014.
- [82] C. I. Byrnes, A. Isidori, and J. C. Willems, “Passivity, feedback equivalence, and the global stabilization of minimum phase nonlinear systems,” *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 36, no. 11, pp. 1228–1240, 1991.
- [83] M. E. Yalçın, J. A. Suykens, and J. P. Vandewalle, *Cellular neural networks, multi-scroll chaos and synchronization*. World Scientific, 2005.
- [84] M. Götz, U. Feldmann, and W. Schwarz, “Synthesis of higher dimensional chua circuits,” *IEEE Trans. Circuits Syst.-I: Fundam. Theory Appl.*, vol. 40, no. 11, pp. 854–860, 1993.
- [85] J. Suykens and J. Vandewalle, “Quasilinear approach to nonlinear systems and the design of n-double scroll ($n = 1, 2, 3, 4, \dots$),” *IEEE Proc. G Circuits Devices Syst.*, vol. 138, no. 5, pp. 595–603, 1991.
- [86] R. Genesio and A. Tesi, “Harmonic balance methods for the analysis of chaotic dynamics in nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 28, no. 3, pp. 531–548, 1992.
- [87] J. Guare, ed., *Six Degrees of Separation: A Play*. Vintage, 1990.

- [88] S. Milgram, “The small-world problem,” *Psychol. Today*, vol. 1, no. 1, pp. 61–67, 1967.
- [89] A. Anishchenko and A. Treves, “Autoassociative memory retrieval and spontaneous activity bumps in small-world networks of integrate-and-fire neurons,” *J. Physiol.*, vol. 100, no. 4, pp. 225–236, 2006.
- [90] Y. Liu, M. Liang, Y. Zhou, Y. He, Y. Hao, M. Song, C. Yu, H. Liu, Z. Liu, and T. Jiang, “Disrupted small-world networks in schizophrenia,” *Brain*, vol. 131, no. 4, pp. 945–961, 2008.
- [91] L. Guzmán-Vargas and R. Hernández-Pérez, “Small-world topology and memory effects on decision time in opinion dynamics,” *Physica A*, vol. 372, no. 2, pp. 326–332, 2006.
- [92] A. Ramani, B. Grammaticos, and J. Satsuma, “Modelling the dynamics of nonendemic epidemics,” *Chaos, Soliton Fract.*, vol. 40, no. 1, pp. 491–496, 2009.
- [93] A. Barrat and M. Weigt, “On the properties of small-world network models,” *Eur. Phys. J. B*, vol. 13, no. 3, pp. 547–560, 2000.
- [94] N. Davey, L. Calcraft, B. Christianson, and R. Adams, *Associative memories with small world connectivity*. Springer, 2005.
- [95] Z. Bao, Q. Jiang, W. Yan, and Y. Cao, “Stability of the spreading in small-world network with predictive controller,” *Phys. Lett. A*, vol. 374, no. 13, pp. 1560–1564, 2010.
- [96] Z. Wang, H. Zhang, and Z. Wang, “Multiple effects of self-protection on the spreading of epidemics,” *Chaos, Soliton Fract.*, vol. 61, pp. 1–7, 2014.
- [97] F. C. Santos, J. F. Rodrigues, and J. M. Pacheco, “Epidemic spreading and cooperation dynamics on homogeneous small-world networks,” *Phys. Rev. E*, vol. 72, no. 5, p. 056128, 2005.
- [98] S. Boccaletti, J. Kurths, G. Osipov, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, “The synchronization of chaotic systems,” *Phys. Rep.*, vol. 366, no. 1, pp. 1–101, 2002.

- [99] R. Femat and G. Solís-Perales, “On the chaos synchronization phenomena,” *Phys. Lett. A*, vol. 262, no. 1, pp. 50–60, 1999.
- [100] M. Hasler, Y. Maistrenko, and O. Popovych, “Simple example of partial synchronization of chaotic systems,” *Phys. Rev. E*, vol. 58, no. 5, p. 6843, 1998.
- [101] H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice Hall, second ed., 1996.
- [102] A. G. Soriano-Sánchez, C. Posadas-Castillo, M. A. Platas-Garza, C. Cruz-Hernández, and R. M. López-Gutiérrez, “Coupling strength computation for chaotic synchronization of complex networks with multi-scroll attractors,” *Appl. Math. Comput.*, vol. 275, pp. 305–316, 2016.